

Векторы. Скалярное, векторное, смешанное произведения

1. Даны точки $A(1,2,1), B(2,-1,3), C(3,\alpha,\beta)$. При каких значениях α и β точка C лежит на прямой AB ?
2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{b} - 2\vec{a}$, построенные на векторах $\vec{a} = (1,-2,5)$ и $\vec{b} = (3,-1,0)$?
3. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1,1,4), B(2,3,-1), C(-2,2,0)$. Найти координаты четвёртой вершины D .
4. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2,6), B(2,8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2,2)$. Найти две другие вершины.
5. Доказать, что четырёхугольник $A(2,1,-4), B(1,3,5), C(7,2,3), D(8,0,-6)$ есть параллелограмм. Найти длины его сторон.
6. Найти точку пересечения медиан в треугольнике с вершинами $A(-5,7,2), B(1,4,-1)$ и $C(7,4,5)$.
7. Даны вершины треугольника $A(3,-1,5), B(4,2,-5)$ и $C(-4,0,3)$. Найти длину медианы, проведённой из вершины A .
8. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами $A(-1,-2,4), B(-4,-2,0), C(3,-2,1)$.
9. Даны вершины треугольника $A(-1,-2,4), B(-4,-2,0), C(3,-2,1)$. Найти величину его внешнего угла при вершине B .
10. Даны вершины четырёхугольника $A(1,2,3), B(7,3,2), C(-3,0,6), D(9,2,4)$. Доказать что его диагонали взаимно перпендикулярны.
11. Найти угол между диагоналями AC и BD параллелограмма, если заданы три его вершины $A(2,1,3), B(5,2,-1), C(-3,3,-3)$.
12. Проверить, что точки $A(3,-1,2), B(1,2,-1), C(-1,1,-3), D(3,-5,3)$ служат вершинами трапеции. Найти длины её параллельных сторон.
13. Известно, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Определить при каком значении λ векторы $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и $\vec{a} - \lambda\vec{b}$ будут перпендикулярны.
14. Найти угол, образованный единичными векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что векторы $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$ перпендикулярны.
15. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}, |\vec{q}| = 3, \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.
16. Определить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 20, |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$.
17. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,1,1), B(2,3,4), C(4,3,2)$.
18. В треугольнике с вершинами $A(1,-1,2), B(5,-6,2)$ и $C(1,3,-1)$ найти длину высоты BD .
19. Известно, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{a} + 3\vec{b}$.
20. Известно, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $2\vec{a} + \vec{b}$.
21. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\vec{a} - \vec{b}$ и $4\vec{a} - 5\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичные векторы и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.
22. Найти объём пирамиды с вершинами $O(-5,-4,8), A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7)$.
23. Вычислить объём тетраэдра $OABC$, если $\vec{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}, \vec{OB} = -3\vec{j} + \vec{k}, \vec{OC} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$.
24. Компланарны ли вектора $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{c} = 14\vec{i} - 13\vec{j} + 7\vec{k}$?
25. При каком значении λ векторы $\vec{a}(\lambda, 3, 1), \vec{b}(5, -1, 2), \vec{c}(-1, 5, 4)$ будут компланарны?
26. В тетраэдре с вершинами $A(1,1,1), B(2,0,2), C(2,2,2), D(3,4,-3)$ вычислить длину высоты, проведённой из точки D .

27. Доказать, что точки $A(1,0,7), B(-1,-1,2), C(2,-2,2), D(0,1,9)$ лежат в одной плоскости.
28. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
29. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку, $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}, \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Прямая на плоскости

1. Составить уравнения параллели и перпендикуляра к прямой $2x + y + 1 = 0$, проходящих через точку $M(2,4)$. Сделать чертёж.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1,-1)$ и $B(-2,-7)$.
3. Показать, что точки $A(2,1), B(-3,3), C(7,-1)$ лежат на одной прямой. Найти её уравнение.
4. В треугольнике с вершинами $A(-2,-1), B(-1,2), C(1,0)$ найти уравнение медианы, проведённой из вершины A .
5. В треугольнике с вершинами $A(-2,-1), B(-1,2), C(1,0)$ найти уравнение высоты, проведённой из вершины A .
6. В треугольнике с вершинами $A(-2,-1), B(-1,2), C(1,0)$ найти уравнение средней линии, параллельной стороне BC .
7. Найти расстояние от точки $M(2,1)$ до прямой $2x + 3y - 1 = 0$.
8. Найти расстояние между прямыми $2x + 3y - 1 = 0$ и $-4x - 6y - 3 = 0$.
9. Найти угол между прямыми $x + 3y - 2 = 0$ и $2x + y + 1 = 0$.

Прямая и плоскость в пространстве

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-3,1,4)$ параллельно плоскости $-7x + 2y + z - 2 = 0$.
11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,-3,-1)$ параллельно векторам $\vec{a}(2,-4,-1)$ и $\vec{b}(1,2,3)$.
12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,1,1)$ и $B(2,3,-1)$ параллельно вектору $\vec{a}(0,-1,2)$.
13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3,-1,2), B(4,-1,-1), C(2,0,2)$.
14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,1,-1)$ перпендикулярно плоскостям $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.
15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,-15,1)$ и $B(3,1,2)$ перпендикулярно плоскости $3x - y - 5z = 0$.
16. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-2,1,0)$ параллельно прямой $\frac{x}{-3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{0}$.
17. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(4,-1,1)$ и $B(3,3,-1)$.
18. Даны вершины треугольника $A(3,-1,5), B(4,2,-5), C(-4,0,3)$. Составить канонические и параметрические уравнения медианы, проведённой из вершины A .
19. Даны вершины треугольника $A(1,-1,3), B(3,-3,9), C(-5,11,7)$. Составить канонические и параметрические уравнения средней линии, параллельной стороне BC .
20. Доказать, что точки $A(-3,-7,-5), B(0,-1,-2), C(2,3,0)$ лежат на одной прямой, причём точка B расположена между A и C . Составить канонические уравнения этой прямой.
21. Составить канонические и параметрические уравнения прямой $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - 4z - 8 = 0 \end{cases}$.

22. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, -3, 5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.
23. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-3, 2, 0)$ перпендикулярно плоскости $2x - 5z + 1 = 0$.
24. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0, 1, 2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-1}$.
25. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, -3, 5)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} 2x + y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + z - 5 = 0 \end{cases}$.
26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 0, 1)$ и прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$.
27. Убедиться, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$ принадлежат одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости.
28. Составить уравнение плоскости, проходящей через пару параллельных прямых $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+1}{-4} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z}{-2}$.
29. Найти угол между плоскостями $x - 7y + 2z = 0$ и $5x + 3y - 2 = 0$.
30. Найти точку пересечения прямых $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ и $\frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1}$.
31. Найти угол между прямыми $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = 2 \\ z = 4t + 12 \end{cases}$.
32. Доказать, что прямые $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$ параллельны.
33. Доказать, что прямые $\begin{cases} x + y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y - z - 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y - z - 5 = 0 \end{cases}$ скрещиваются.
34. Доказать, что прямые $\begin{cases} x + y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y - z - 5 = 0 \end{cases}$ и $\frac{x+3}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{2}$ пересекаются, найти их точку пересечения.
35. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z-1}{-3}$ и плоскостью $6x - 3y + 2z + 1 = 0$.
36. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z-6}{-3}$ и плоскости $6x - 3y + 2z = 0$.
37. Доказать, что прямая $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3y - 4z - 9 = 0 \end{cases}$ и плоскость $4x + 8y + 6z - 3 = 0$ параллельны.
38. Найти проекцию точки $A(5, 2, -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.
39. Найти точку симметричную точке $A(4, -3, 1)$ относительно плоскости $x + 2y - z - 3 = 0$.
40. Найти расстояние от точки $A(-1, 2, 4)$ до плоскости $6x - 2y - 3z - 6 = 0$.
41. Найти расстояние между плоскостями $-x + 2y - z + 1 = 0$ и $2x - 4y + 2z + 3 = 0$.
42. Найти проекцию точки $A(4, 3, 10)$ на прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.
43. Составить канонические уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A(5, 3, 1)$ на прямую $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$.
44. Найти расстояние от точки $M(3, 1, 2)$ до прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$.
45. Найти точку, симметричную точке $M(3, 1, 2)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$.