

## Общая схема исследования функции и построение графика

Общая схема исследования функции состоит из трёх этапов. Эта схема даст нам практический способ построения графика функции, отражающего основные черты её поведения.

### *Первый этап – элементарное исследование функции*

1. Найти область определения функции  $D(f)$ .
2. Выяснить общие свойства функции, которые помогут в определении её поведения:
  - является функция чётной либо нечётной,
  - является ли функция периодической.
3. Найти точки пересечения функции с осями координат: с осью ОУ:  $x=0 \Rightarrow$  найти  $f(0)$ ; с осью ОХ:  $y=0 \Rightarrow$  решить уравнение  $f(x)=0$ . Отметить все найденные точки на координатной плоскости. Найти интервалы знакопостоянства функции.
4. Найти точки разрыва функции и выяснить поведение функции в окрестности этих точек.
5. Выяснить поведение функции в окрестности граничных точек, включая и несобственные точки  $-\infty$  и  $+\infty$ .
6. Найти асимптоты:
  - 1) Вертикальная асимптота:  $x = a, \lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm \infty$ ;
  - 2) Горизонтальная асимптота:  $y = b, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ ;
  - 3) Наклонная асимптота:  $y = kx + b, k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq \infty, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) \neq \infty$

Результатом элементарного исследования функции является построение эскиза графика функции.

### *Второй этап – исследование функции с помощью первой производной.*

1. Найти первую производную заданной функции  $f(x)$ .
2. Найти критические точки первого рода, где  $f'(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \\ \text{не существует.} \end{cases}$
3. Найти участки возрастания ( $f'(x) > 0$ ) и убывания ( $f'(x) < 0$ ).
4. Определить локальные экстремумы: точки, где  $f'(x)$  меняет знак.

### *Третий этап – исследование функции с помощью второй производной.*

1. Найти вторую производную заданной функции  $f(x)$ .
2. Найти точки, где вторая производная  $f''(x)$  равна нулю или не существует.
3. Найти участки выпуклости ( $f''(x) < 0$ ) и вогнутости ( $f''(x) > 0$ ) графика функции.
4. Определить точки перегиба.

Полученные в каждом пункте результаты последовательно фиксируем на рисунке в качестве элементов искомого графика и в итоге получаем график функции.