ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция № 8

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

- Смешанное произведение векторов, свойства и координатное выражение
- Векторное уравнение прямой
- Параметрическое и каноническое уравнения прямой на плоскости
- Уравнение прямой проходящей через две точки

8.1. Смешанное произведение векторов.

Определение 8.1. ***Смешанным произведением*** трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется **число**, равное скалярному произведению векторного произведения первых двух векторов на третий вектор: $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$.

Найдем выражение для смешанного произведения трех векторов $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ и $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ через их координаты:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot\vec{k}, c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot c_z=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.}$$

Таким образом, смешанное произведение равно определителю третьего порядка, в строках которого стоят координаты перемножаемых векторов.

Пользуясь свойствами определителя, можно показать, что:

$$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = (\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]),$$

т.е. знаки скалярного и векторного произведения в смешанном произведении можно переставлять. Поэтому смешанное произведение принято обозначать $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения:

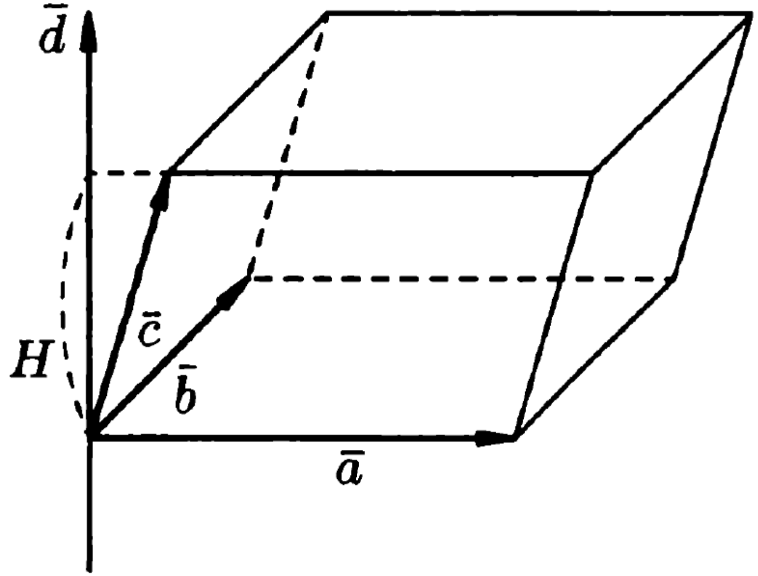
1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$

Чтобы запомнить эти равенства заметим, что при «циклической перестановке» векторов (вектор передвигается на следующее место, а последний – на первое) знак не меняется, а при перестановке двух соседних векторов знак меняется.

2) Геометрический смысл смешанного произведения:

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах.

$$\boxed{V_{\text{параллелепипеда}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.}$$



►Построим вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, длина которого в соответствии с геометрическим смыслом векторного произведения, равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. площади основания параллелепипеда:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S.$$

Из определения смешанного произведения:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{d}$ и $\vec{c}$.

На рисунке рассмотрен случай, когда угол $\varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ высота параллелепипеда $H = |\vec{c}| \cdot \cos\varphi \Rightarrow$

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi = S \cdot H = V$ – объем параллелепипеда, изображенного на рисунке.

В случае $\varphi > \frac{\pi}{2} \Rightarrow H = -|\vec{c}| \cdot \cos\varphi$ (т.к. $\cos\varphi < 0$) и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -V$. Окончательно получаем: $V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$. ◄

3) **Теорема 8.1** ***(критерий компланарности векторов).*** Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю:

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.}$$

►Если три вектора компланарны, можно считать, что они лежат в одной плоскости и тогда объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен нулю, т.е. смешанное произведение равно нулю. Если наоборот, смешанное произведение равно нулю, то объем параллелепипеда равен нулю и, значит, все векторы параллельны одной плоскости (компланарны) или хотя бы один из них равен нулю, что тоже означает компланарность всех трех векторов. ◄

Таким образом, необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю определителя, составленного из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 8.1. Выяснить компланарны ли векторы $\vec{a} = (1;3;0)$, $\vec{b} = (-1;0;-1)$ и $\vec{c} = (1;2;1)$?

Решение. Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 0 - 0 - (-3) - (-2) = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарные.

Пример 8.2. В пирамиде $ABCD$ с вершинами $A(10;7;1)$, $B(7;10;0)$, $C(1;10;7)$, $D(7;1;17)$ найти:

a) угол между ребрами AB и AD;

b) площадь основания ABC;

c) объем пирамиды;

d) высоту пирамиды h_D, опущенной из вершины D.

Решение.

a) Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ в координатах:

$$\overrightarrow{AB} = (7-10;10-7;0-1) = (-3;3;-1),$$

$$\overrightarrow{AD} = (7-10;1-7;17-1) = (-3;-6;16).$$

Чтобы найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ в координатах:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = (-3)\cdot(-3) + 3\cdot(-6) + (-1)\cdot 16 = -25,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{19},$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 16^2} = \sqrt{301}.$$

Подставляем в формулу скалярного произведения:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot cos\,\varphi \quad \Leftrightarrow \quad -25 = \sqrt{19}\sqrt{301}\,cos\,\varphi,$$

откуда

$$cos\,\varphi = -\frac{25}{\sqrt{19}\sqrt{301}} \approx \sim -0.330,\ \ \varphi \approx 1.907.$$

b) Площадь основания ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. По свойству векторного произведения:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-10; 10-7; 7-1) = (-9; 3; 6) \Rightarrow$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \big(18-(-3)\big)\vec{i} - (-18-9)\vec{j} + (-9-(-27))\vec{k} = 21\vec{i} + 27\vec{j} + 18\vec{k} =$$
$$= (21; 27; 18).$$

$$\big|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\big| = \sqrt{21^2+27^2+18^2} = \sqrt{1494} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{1494}.$$

c) Объем пирамиды равен одной шестой от объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

Объем параллелепипеда можно вычислить как модуль смешанного произведения $\left([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}], \overrightarrow{AD}\right)$:

$$\left([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}], \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(48+36) - 3(-144+18) - (54+9) = 63.$$

Следовательно, $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 63 = \frac{21}{2}$.

d) Высоту h_D можно найти, используя формулу объема пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h_D \;\Rightarrow\; h_D = \frac{3V}{S_{ABC}} \Rightarrow$$

$$h_D = \frac{3 \cdot \frac{21}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{1494}} = \frac{63}{\sqrt{1494}}.$$

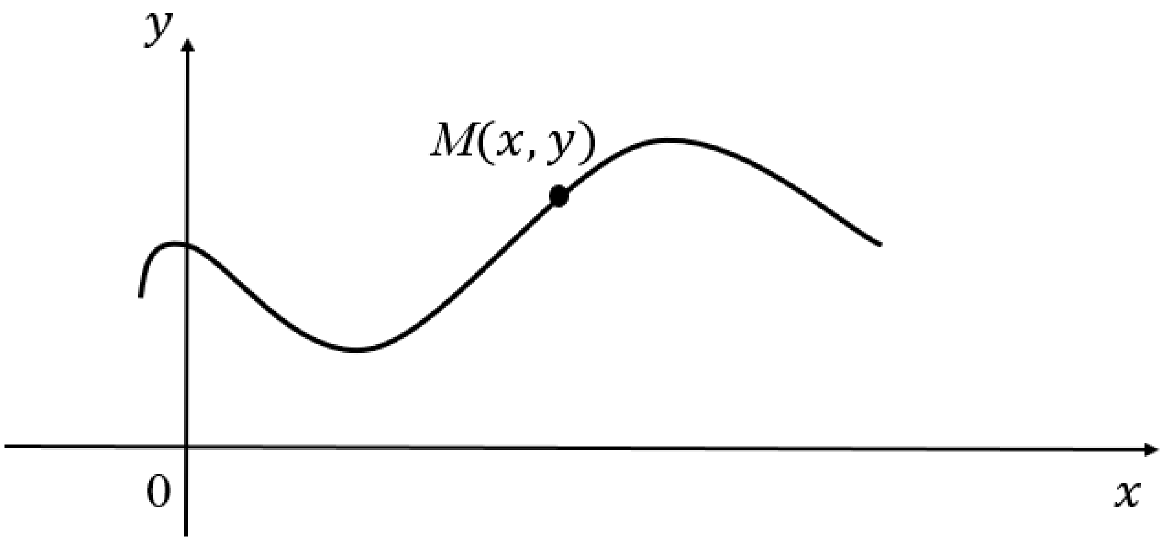
8.2. Аналитическая геометрия на плоскости.

Определение 8.2. Уравнением линии (кривой) на плоскости Oxy называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Уравнение линии записывается в виде:

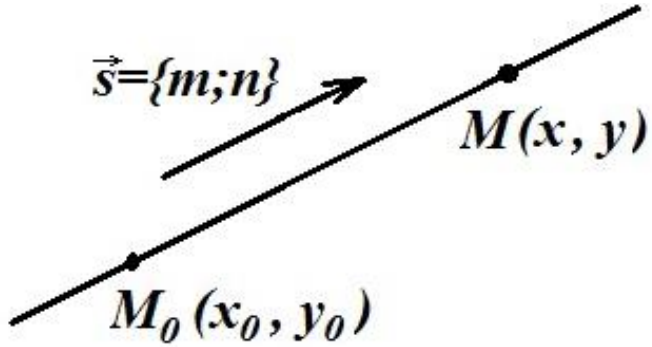
$$F(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad y = f(x).$$

Если точка $M(x; y)$ передвигается по линии, то ее координаты, изменяясь, удовлетворяют уравнению этой линии. Координаты $M(x; y)$ называются текущими координатами.



8.3. Векторное уравнение прямой.

Рассмотрим на плоскости прямую l, проходящую через точку $M_0(x_0;y_0)$ и вектор $\vec{s}=\{m;n\}$, коллинеарный данной прямой (такой вектор называется направляющим вектором прямой l).



Произвольная точка $M(x;y)$ будет лежать на прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ будут коллинеарны.

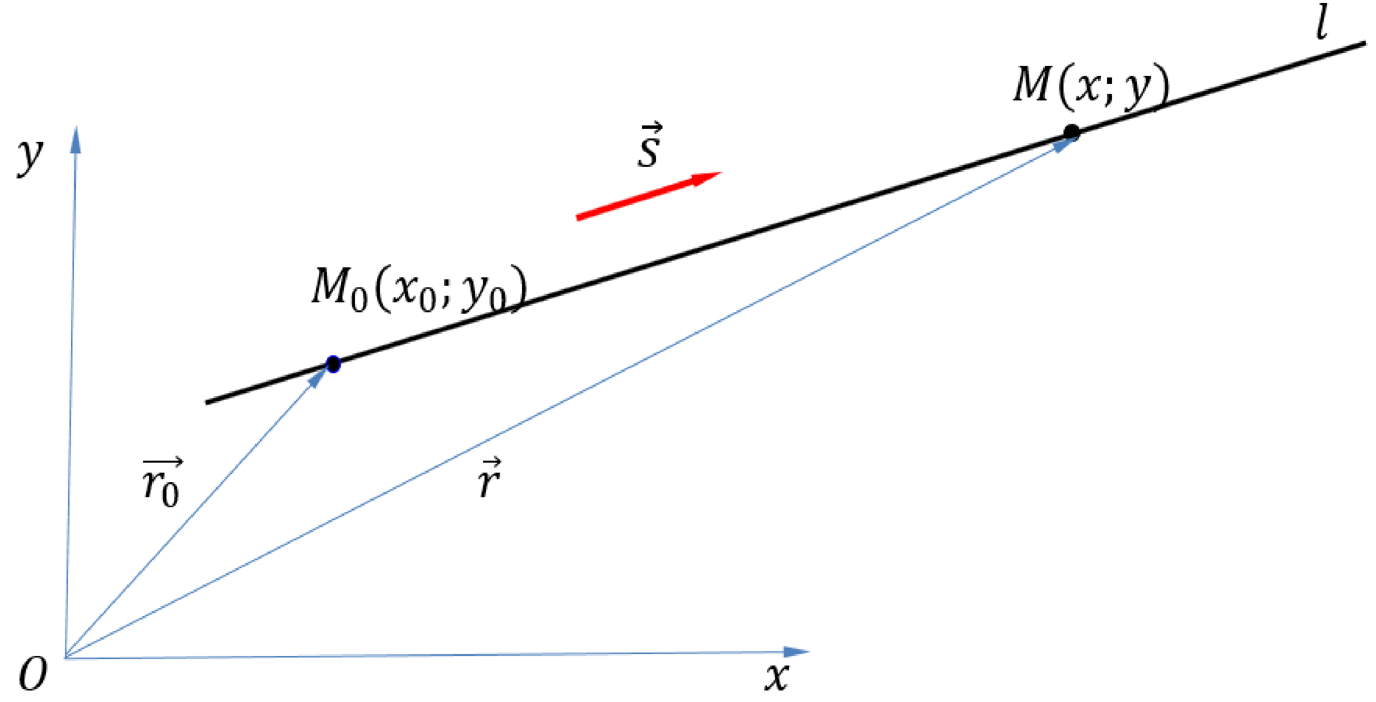
Если векторы коллинеарны, то существует некоторое число $t \in \mathbb{R}$, такое, что выполняется равенство:

$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}, \tag{8.1}$$

где $t \in (-\infty; +\infty)$ – параметр.

Каждому значению t соответствует определенная точка на прямой l.

Уравнение (8.1) называется *векторным уравнением* прямой l.
Рассмотрим $\overrightarrow{r_0}$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0; y_0)$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $M(x; y)$.



$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t \cdot \vec{s} \;\Rightarrow$$

$$\vec{r} = t\vec{s} + \overrightarrow{r_0} \tag{8.2}$$

Уравнение (8.2) называется *векторно-параметрическим уравнением* прямой l.

8.4. Параметрические уравнения прямой.

Так как координаты вектора $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ и известны координаты вектора $\vec{s} = \{m; n\}$, то можно записать векторное уравнение прямой (8.1) в координатах:

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot m \\ y - y_0 = t \cdot n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = m \cdot t + x_0 \\ y = n \cdot t + y_0 \end{cases} \tag{8.3}$$

Полученную систему (8.3) называют *параметрическими уравнениями прямой.*

Пример 8.3. Написать параметрические уравнения прямой AB, если $A(-1; 3)$ и $B(2; 7)$.

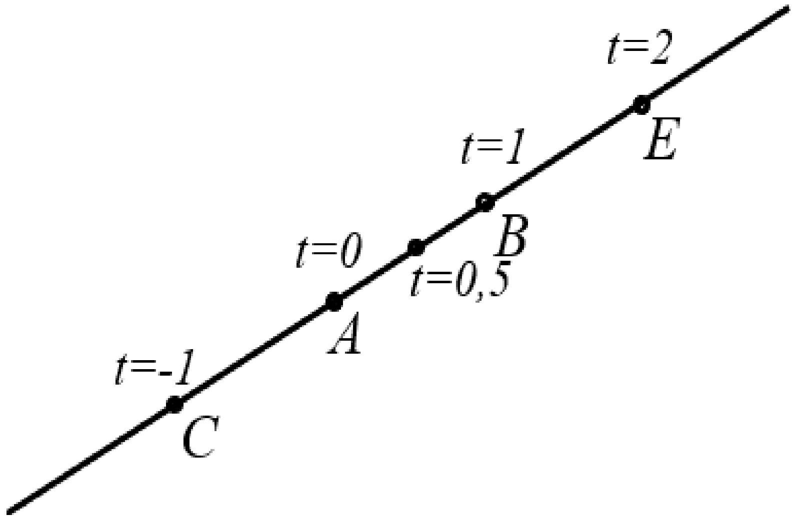
Решение. Найдем направляющий вектор прямой:

$$\overrightarrow{AB} = \{2 - (-1); 7 - 3\} = \{3; 4\}.$$

В качестве точки на прямой возьмем точку $A(-1;3)$. Подставляя эти данные в параметрические уравнения прямой, получим:

$$\begin{cases} x = 3t + (-1) \\ y = 4t + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 4t + 3 \end{cases}, t \in (-\infty; +\infty).$$

Изучим, в каком смысле эта система уравнений определяет прямую.



При $t = 0$ получаем значение координат $x = -1$, $y = 3$ – это точка A.

Значению параметра $t = 1$ соответствует точка $B(2;7)$, значению $t = \frac{1}{2}$ соответствует точка, находящаяся в середине отрезка AB.

Значению $t = -1$ отвечает точка C, расположенная симметрично точке B относительно A.

Когда параметр t пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, соответствующая точка последовательно занимает все промежуточные положения на прямой.

Обратно, зная координаты произвольной точки плоскости, по параметрическому уравнению можно определить, лежит ли данная точка на прямой и, если да, то какому значению параметра эта точка соответствует.

Например, для точки $D(2;6)$ получаем:

$$\begin{cases} 2 = 3t - 1 \\ 6 = 4t + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

система противоречива, и точка D не лежит на прямой.

Для точки $E(5;11)$ получаем:

$$\begin{cases} 5 = 3t - 1 \\ 11 = 4t + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

точка E лежит на прямой и отвечает значению $t = 2$.

8.5. Каноническое уравнение прямой.

Выражая параметр t из каждого уравнения параметрической системы (8.3), получим

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{m} \\ t = \dfrac{y - y_0}{n} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \qquad (8.4)}$$

Равенство (8.4) – *каноническое уравнение* прямой, проходящей через точку с координатами $(x_0; y_0)$, параллельно вектору $\vec{s} = \{m; n\}$.

Пример 8.4. Дано каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 3}{4}.$$

1) Через какую точку проходит данная прямая и какие координаты имеет ее направляющий вектор?
2) Записать параметрические уравнения данной прямой, проверить лежит ли точка $A(0; -5)$ на этой прямой, в случае положительного ответа, найти значение параметра, соответствующее данной точке.

Решение.

1) Данное уравнение является каноническим уравнением прямой, тогда

$$x_0 = -2,\ y_0 = 3,\ m = -1,\ n = 4.$$

Следовательно, прямая проходит через точку $M_0(-2;3)$, параллельно вектору $\vec{s} = \{-1;4\}$ – направляющий вектор прямой.

2) Из канонического уравнения прямой получим параметрические уравнения:

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{4} = t \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{-1} = t \\ \dfrac{y-3}{4} = t \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} x = -t-2 \\ y = 4t+3 \end{cases}$, $t \in (-\infty;+\infty)$ – параметрические уравнения прямой

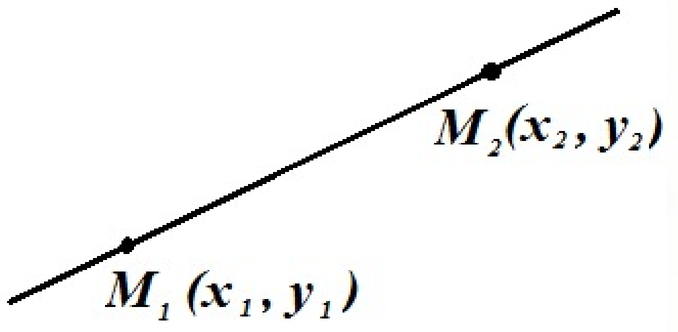
Подставим координаты точки $A(0;-5)$ в уравнения прямой:

$$\begin{cases} 0 = -t-2 \\ -5 = 4t+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t = 2 \\ 4t = -8 \end{cases} \Rightarrow \text{система совместна,}$$

следовательно точка $A(0;-5)$ лежит на прямой и $t = -2$ – соответствующее значение параметра.

8.6. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть даны две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, лежащие на прямой l.



Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$, являющийся направляющим вектором данной прямой. Тогда можно записать каноническое уравнение прямой l, используя в качестве $(x_0;y_0)$ координаты точки M_1 или M_2:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (8.5)}$$

Равенство (8.5) – *уравнение прямой, проходящей через две заданные точки*.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В ромбе $ABCD$ диагонали $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Разложить по этим двум векторам векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.

2. Зная одну из вершин треугольника $A(1; -6; 3)$ и векторы, совпадающие с двумя сторонами $\overrightarrow{AB} = 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, найти остальные вершины и вектор $\overrightarrow{CA}$.

3. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5; 3; 4)$, $B(-1; -7; 5)$, $C(6; -5; -3)$ и $D(2; 5; -4)$ есть квадрат.

4. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$. Доказать, что эти векторы компланарны.

5. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

6. Найти $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) - (\vec{e} \times \vec{f}) \times \vec{q}$, если $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = (-2; 3; 1)$, $\vec{c} = (2; -2; 2)$, $\vec{e} = (-1; 3; 5)$, $\vec{f} = (1; 0; -2)$ и $\vec{q} = (3; -2; 2)$.

7. Даны единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Зная, что $\left(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}\right) = \left(\widehat{\vec{e}_3, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2}\right) = \alpha$, доказать равенство $\left(\overrightarrow{\vec{e}_1} \times \overrightarrow{\vec{e}_2}\right) \cdot \vec{e}_3 = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

8. Зная, что $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$ найти соотношение между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, не содержащее коэффициенты λ_1 и λ_2.

Указание. Исключить λ_1 можно умножением равенства векторно на $\vec{a}$.

9. Доказать (геометрически), что при любых векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны. Каков геометрический смысл этого факта?

Спасибо за внимание!