ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция № 3

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
- Обратная матрица и ее свойства. Критерий обратимости матрицы.
- Методы отыскания обратной матрицы.
- Виды матричных уравнений.
- Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Определение 3.1. Матрица, определитель которой равен нулю, называется ***вырожденной***. Матрица, определитель которой не равен нулю, называется ***невырожденной***.

3.1. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.1}$$

Введем обозначения $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец, составленная из неизвестных,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец, составленная из свободных членов.

Тогда система линейных уравнений может быть записана в матричном виде:

$$\boxed{A \cdot X = B \qquad (3.2)}$$

Умножим каждое уравнение системы (3.1) на алгебраические дополнения к элементам первого столбца матрицы A: первое уравнение системы на алгебраическое дополнение A_{11}, второе – на A_{21}, …, последнее – на A_{n1} и сложим уравнения системы:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2 +$$

$$+\cdots+(a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+\cdots+a_{nn}A_{n1})x_n=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}.$$

Все слагаемые левой части кроме первого равны нулю по **теореме 2.2**, а правая часть имеет вид:

$$b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=|A_1|=\Delta_1,$$

следовательно,

$$|A|x_1=|A_1| \Rightarrow x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \text{если } |A|=\Delta\neq 0.$$

Аналогично, умножая каждое уравнение системы (3.1) на алгебраические дополнения к элементам второго, третьего и т.д. столбцов матрицы A, получим формулы для нахождения остальных неизвестных $x_2, x_2, \dots, x_n$:

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta_2 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_2|$,

…

$$\Delta_n = b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix} = |A_n|.$$

Теорема 3.1 (правило Крамера). Если определитель матрицы коэффициентов системы уравнений (3.1) отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение, определяемое по ***формулами Крамера***:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}\,. \qquad (3.2)}$$

Если же $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ отличен от нуля, то система не имеет решений (несовместна).

$\Delta = |A|$ – определитель матрицы A коэффициентов системы,

$\Delta_i = |A_i|$ – определитель матрицы A_i, которая получается из матрицы A заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Замечание 3.1. Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = 0$, то метод Крамера не позволяет сделать вывод о решениях системы.

Пример 3.1. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов.

Тогда:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 6 - 1 - 4 - 3 = 1 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 3 - 0 - 2 - 0 = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - 3 = -1.$$

По формулам Крамера, получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Проверка:
$$1 + 2 \cdot 0 + (-1) = 0 \text{ – верно,}$$
$$2 \cdot 1 + 0 + (-1) = 1 \text{ – верно,}$$
$$1 + 3 \cdot 0 + (-1) = 0 \text{ – верно.}$$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1.$

3.2. Обратная матрица.

Определение 3.2. Если A – квадратная матрица, то ***обратной*** к ней матрицей (обозначается A^{-1}) называется матрица, удовлетворяющая условию

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E}$$

Теорема 3.2 ***(критерий обратимости матрицы).*** Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную матрицу необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной (т.е. $\det A \neq 0$).

► *Необходимость*. Пусть для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}, покажем, что в этом случае матрица A невырожденная: $|A| \neq 0$.

Действительно, если бы $|A| = 0$, то определитель произведения AA^{-1} равен:

$$|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 0,$$

но $|AA^{-1}| = |E| = 1$, следовательно $|A| \neq 0$.

Достаточность. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – невырожденная матрица:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Покажем, что в этом случае существует обратная матрица.

Рассмотрим A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A. Составим матрицу A^*, заменяя в матрице A каждый элемент a_{ij} его алгебраическим дополнением A_{ij}:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Транспонируя матрицу A^*, получим матрицу $\tilde{A} = {A^*}^T$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется ***присоединенной (союзной) матрицей.***

Покажем, что обратной к матрице A будет матрица вида:

$$B = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} \, .$$

Составим произведение:

$$A \cdot B = A \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1n}A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \cdots + a_{1n}A_{nn}}{|A|} \\ \frac{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots + a_{2n}A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{2n}A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{a_{21}A_{n1} + a_{22}A_{n2} + \cdots + a_{2n}A_{nn}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \cdots + a_{nn}A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{n1}A_{21} + a_{n2}A_{22} + \cdots + a_{nn}A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{|A|}{|A|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{|A|}{|A|} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{|A|}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично можно показать, что $B \cdot A = E$.

Следовательно, если матрица A ***невырожденная***, то обратная матрица существует и равна $\frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$. ◄

Замечание 3.2. Из доказательства критерия получаем формулу для нахождения обратной матрицы, если $|A| \neq 0$:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}, \qquad (3.3)}$$

где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ – присоединенная матрица.

Теорема 3.3 (*о единственности обратной матрицы*). Если обратная матрица A^{-1} существует, то она единственна.

►Пусть A – невырожденная квадратная матрица ⇒ существует A^{-1}. Покажем, что она единственна. Предположим, что существует другая матрица C, обладающая свойством:

$$A \cdot C = C \cdot A = E.$$

Умножим равенство: $A \cdot C = E$ на A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot C) = A^{-1} \cdot E \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot C = A^{-1} \cdot E \Rightarrow \underbrace{E \cdot C}_{C} = \underbrace{A^{-1} \cdot E}_{A^{-1}} \Rightarrow C = A^{-1}.$$

Матрица C совпадает с матрицей A^{-1}. ◄

Свойства обратной матрицы:

1. $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathrm{A}}$;

2. $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1}$;

3. $(\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$;

4. $(A^{-1})^{-1} = A$;

5. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$.

3.3. Методы нахождения обратной матрицы.

I. ***Метод присоединенной матрицы*** состоит в применении формулы:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} .$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Вычислить определитель матрицы A.

Если $|A| = 0 \Rightarrow$ матрица A – вырожденная матрица $\Rightarrow$ A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$ $\Rightarrow$ переходим к пункту 2.

2. Составить матрицу из алгебраических дополнений A^*.

3. Транспонировать матрицу из алгебраических дополнений: $(A^*)^T = \tilde{A}$ – присоединенная матрица.

4. Вычислить A^{-1} по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$.

Пример 3.2. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$ $\Rightarrow$ матрица A – невырожденная $\Rightarrow$ существует A^{-1}.

2. Вычисляем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$, $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$,

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2,\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$

Составляем матрицу из алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем матрицу A^*, получим присоединенную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

5. Проверяем полученный результат:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

II. *Метод элементарных преобразований (метод Гаусса).*

Приписываем справа к матрице A единичную матрицу и получаем расширенную матрицу $(A|E)$, которую с помощью элементарных преобразований над строками приводим к виду $(E|A^{-1})$:

$$\boxed{(A|E) \sim (E|A^{-1})}$$

Элементарные преобразования матриц:

1. Умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и тоже число, отличное от нуля.
2. Прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и тоже число.
3. Перемена местами строк (столбцов) матрицы.
4. Отбрасывание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Определение 3.3. Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются ***эквивалентными:*** $A \sim B$.

Пример 3.3. Найти матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ методом Гаусса.

Решение:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\3&2&1&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)^{\mathrm{I}\cdot(-3)+\mathrm{II}}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&-4&1&-3&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)^{\mathrm{II}+\mathrm{III}\cdot 4}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&-4&1&-3&1&0\\0&0&9&-3&1&4\end{array}\right)^{\mathrm{II}\cdot\frac{1}{2}+\mathrm{I}}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-4&1&-3&1&0\\0&0&9&-3&1&4\end{array}\right)^{\substack{\mathrm{III}\cdot\left(-\frac{1}{18}\right)+\mathrm{I}\\ \mathrm{III}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)+\mathrm{II}}}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & -4 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{c}\mathrm{II}:(-4) \\ \mathrm{III}:9\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{array}\right) = (E|A^{-1}).$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Получили тот же результат, что и первым методом.

3.4. Матричные уравнения.

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X имеют вид:

$$A \cdot X = B, \tag{3.4}$$

$$X \cdot A = B, \tag{3.5}$$

$$A \cdot X \cdot B = C. \tag{3.6}$$

В уравнениях (3.4), (3.5) и (3.6) матрицы A, B, C, X таких размеров, что операции умножения возможны, и с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров.

Пусть в уравнениях (3.4) и (3.5) матрица A квадратная и невырожденная:

$$\det A \neq 0.$$

Умножим обе части уравнения (3.4) на матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \ \Rightarrow \ \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

$E \cdot X = X \ \Rightarrow$ решение матричного уравнения (3.4) получится в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Таким образом, имеем:

$$\boxed{A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.}$$

Аналогично, умножая обе части уравнения (3.5) на матрицу A^{-1} справа, получим:

$$(X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{E} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}.$$

$$\boxed{X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}.}$$

Если в уравнении (3.6) матрицы A и B квадратные и невырожденные, то можно выразить неизвестную матрицу X умножив обе части матричного уравнения (3.6) слева на A^{-1}, а справа на B^{-1}:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{E} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

$$\boxed{A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.}$$

Пример 3.4. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда матричное уравнение имеет вид: $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем A^{-1}: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, значит A^{-1} существует. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-3) = 3$, $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) = 2$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$ – присоединенная матрица,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка обратной матрицы:

$$A^{-1}A = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Обратная матрица найдена верно.

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 10 & 20 \\ -3 & 8 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 1{,}5 & -4 & -7{,}5 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 1{,}5 & -4 & -7{,}5 \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ – верно.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 1{,}5 & -4 & -7{,}5 \end{pmatrix}.$

Пример 3.5. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.
Сделать проверку.

Решение: Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ тогда

матричное уравнение имеет вид: $A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $|B| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}_{X} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 23 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} - \text{верно.}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$

3.5. Решение системы линейных уравнений матричным методом.

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Система линейных уравнений может быть записана в матричном виде:

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов.

Тогда, если матрица A невырожденная ($|A| \neq 0$), то решение системы можно найти по формуле:

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B.}$$

Пример 3.6. Решить матричным способом систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Проверим условие $|A| \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1-3) - 2 \cdot (2-1) + 1 \cdot (6-1) = -2 - 2 + 5 = 1 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A^{-1} существует.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ \ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5,$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$

$-1,$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$

Получаем: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$

Теперь решение уравнения можно найти по формуле:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ \ x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1.$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – верно.

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1.$

Спасибо за внимание!