

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
1 СЕМЕСТР**

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция № 3

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
- Обратная матрица и ее свойства. Критерий обратимости матрицы.
- Методы отыскания обратной матрицы.
- Виды матричных уравнений.
- Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

19 сентября 2023 г.

3.1. Обратная матрица.

Определение 3.1. Если A – квадратная матрица, то **обратной** к ней матрицей (обозначается A^{-1}) называется матрица, удовлетворяющая условию

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Теорема 3.1 (критерий обратимости матрицы). Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную матрицу необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной (т.е. $\det A \neq 0$).

► **Необходимость.** Пусть для матрицы A существует обратная матрица A^{-1} , покажем, что в этом случае матрица A невырожденная: $|A| \neq 0$.

Действительно, если бы $|A| = 0$, то определитель произведения AA^{-1} равен:

$$|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 0,$$

но $|AA^{-1}| = |E| = 1$, следовательно $|A| \neq 0$.

Достаточность. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – невырожденная

матрица:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Покажем, что в этом случае существует обратная матрица.

Рассмотрим A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A . Составим матрицу A^* , заменяя в матрице A каждый элемент a_{ij} его алгебраическим дополнением A_{ij} :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Транспонируя матрицу A^* , получим матрицу $\tilde{A} = A^{*T}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется **присоединенной (союзной) матрицей**.

Покажем, что обратной к матрице A будет матрица вида:

$$B = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}.$$

Составим произведение:

$$A \cdot B = A \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \dots + a_{1n}A_{nn}}{|A|} \\ \frac{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \dots + a_{2n}A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{a_{21}A_{n1} + a_{22}A_{n2} + \dots + a_{2n}A_{nn}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \dots + a_{nn}A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{n1}A_{21} + a_{n2}A_{22} + \dots + a_{nn}A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{|A|}{|A|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{|A|}{|A|} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{|A|}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично можно показать, что $B \cdot A = E$. Следовательно, если матрица A невырожденная, то обратная матрица существует и равна $\frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$. ◀

Замечание 3.1. Из доказательства критерия получаем формулу для нахождения обратной матрицы, если $|A| \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}, \quad (3.1)$$

где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ — присоединенная матрица.

Теорема 3.2 (о единственности обратной матрицы). Если обратная матрица A^{-1} существует, то она единственна.

► Пусть A – невырожденная квадратная матрица \Rightarrow существует A^{-1} . Покажем, что она единственна. Предположим, что существует другая матрица C , обладающая свойством:

$$A \cdot C = C \cdot A = E.$$

Умножим равенство: $A \cdot C = E$ на A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot C) = A^{-1} \cdot E \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_E \cdot C = A^{-1} \cdot E \Rightarrow \underbrace{E \cdot C}_C = \underbrace{A^{-1} \cdot E}_{A^{-1}} \Rightarrow C = A^{-1}.$$

Матрица C совпадает с матрицей A^{-1} . ◀

Свойства обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;
4. $(A^{-1})^{-1} = A$;
5. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

3.2. Методы нахождения обратной матрицы

I. Метод присоединенной матрицы состоит в применении формулы (3.1):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}.$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Вычислить определитель матрицы A .

Если $|A| = 0 \Rightarrow$ матрица A – вырожденная матрица $\Rightarrow A^{-1}$ не существует.

Если $|A| \neq 0 \Rightarrow$ переходим к пункту 2.

2. Составить матрицу из алгебраических дополнений A^* .

3. Транспонировать матрицу из алгебраических дополнений: $(A^*)^T = \tilde{A}$ – присоединенная матрица.

4. Вычислить A^{-1} по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$.

Пример 3.1. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \Rightarrow$ матрица A – невырожденная \Rightarrow существует A^{-1} .

2. Вычисляем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Составляем матрицу из алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем матрицу A^* , получим присоединенную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

5. Проверяем полученный результат:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

II. Метод элементарных преобразований (метод Гаусса).

Приписываем справа к матрице A единичную матрицу и получаем расширенную матрицу $(A|E)$, которую с помощью элементарных преобразований над строками приводим к виду $(E|A^{-1})$:

$$(A|E) \sim (E|A^{-1}).$$

Элементарные преобразования матриц:

- 1.** Умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и то же число, отличное от нуля.
- 2.** Прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.
- 3.** Перемена местами строк (столбцов) матрицы.
- 4.** Отбрасывание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Определение 3.2. Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются **эквивалентными**: $A \sim B$.

Пример 3.2. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ методом

Гаусса.

Решение:

$$\begin{aligned}
 (A|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} I \cdot (-3) + II \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ II + III \cdot 4 \\ \end{array} \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ II \cdot \frac{1}{2} + I \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III \cdot \left(-\frac{1}{18}\right) + I \\ III \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) + II \end{array} \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & -4 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ II : (-4) \\ III : 9 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{array} \right) = (E|A^{-1}).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Получили тот же результат, что и первым методом.

3.3. Матричные уравнения

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X имеют вид:

$$A \cdot X = B, \quad (3.2)$$

$$X \cdot A = B, \quad (3.3)$$

$$A \cdot X \cdot B = C. \quad (3.4)$$

В уравнениях (3.2), (3.3) и (3.4) матрицы A, B, C, X таких размеров, что операции умножения возможны, и с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров.

Пусть в уравнениях (3.2) и (3.3) матрица A квадратная и невырожденная:

$$\det A \neq 0.$$

Умножим обе части уравнения (3.2) на матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

$E \cdot X = X \Rightarrow$ решение матричного уравнения (3.2) получится в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Таким образом, имеем:

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B. \quad (3.5)$$

Аналогично, умножая обе части уравнения (3.3) на матрицу A^{-1} справа, получим:

$$(X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_E = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}.$$

$$X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}. \quad (3.6)$$

Если в уравнении (3.4) матрицы A и B квадратные и невырожденные, то можно выразить неизвестную матрицу X умножив обе части матричного уравнения (3.4) слева на A^{-1} , а справа на B^{-1} :

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_E \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_E = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

$$A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}. \quad (3.7)$$

Пример 3.3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Сделать проверку.

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда матричное уравнение имеет вид (3.2): $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем A^{-1} : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, значит A^{-1} существует. Найдем

алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-3) = 3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) = 2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \text{присоединенная матрица,}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка обратной матрицы:

$$A^{-1}A = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \Rightarrow$$

обратная матрица найдена верно.

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot B &= \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 10 & 20 \\ -3 & 8 & 15 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 1,5 & -4 & -7,5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 1,5 & -4 & -7,5 \end{pmatrix}}_X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ — верно.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 1,5 & -4 & -7,5 \end{pmatrix}$.

Пример 3.4. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Сделать проверку.

Решение: Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ тогда матричное уравнение имеет вид: $A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, |B| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}_X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 23 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} - \text{верно.}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3.4. Решение системы линейных уравнений матричным методом

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Система линейных уравнений может быть записана в матричном виде:

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец

свободных членов.

Тогда, если матрица A невырожденная ($|A| \neq 0$), то решение системы можно найти по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример 3.5. Решить матричным способом систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Проверим условие $|A| \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 3) - 2 \cdot (2 - 1) + 1 \cdot (6 - 1) = -2 - 2 + 5 = 1 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A^{-1} существует. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Получаем обратную матрицу вида: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Теперь решение уравнения можно найти по формуле (3.5):

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1.$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — верно.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1.$

Спасибо за внимание!