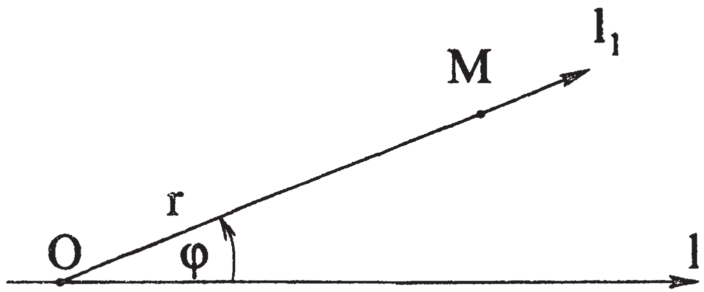
Полярные координаты.

Положение точки на плоскости можно определить с помощью полярной системы координат.

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой ***полюсом***, и выходящего из этой точки луча l, называемого ***полярной осью***.

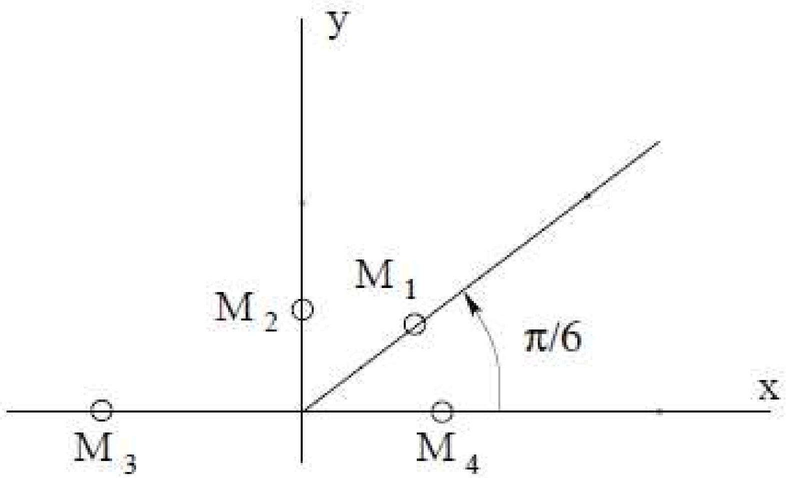
Положение точки M на плоскости в полярной системе координат задается полярным углом φ и полярным радиусом r, называемыми ***полярными координатами*** точки M: $M(\varphi;r)$.

Пусть на плоскости задана числовая ось l. Назовем ее, а ее начало - точку Проведем через точку M и полюс O ось l_1, начало которой совпадает с O, а положительное направление от O к M.



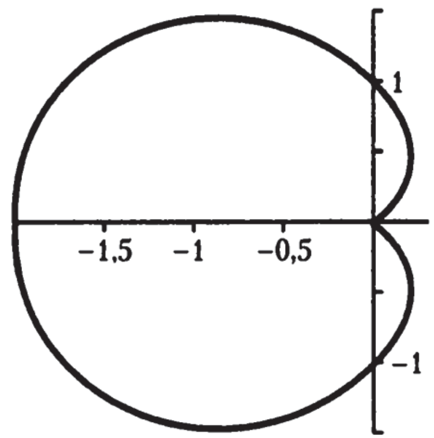
Полярный угол φ - это угол между полярной осью l и осью l_1, отсчитываемый со знаком "+" против часовой стрелки и со знаком "-" по часовой стрелке.

Полярный радиус r - это расстояние от O до точки M по оси l_1 $(r \geq 0)$.
Если значение полярного угла φ ограничить промежутком $0 \leq \varphi < 2\pi$, то между точками плоскости и упорядоченными парами полярных координат $(\varphi;r)$ будет существовать взаимно-однозначное соответствие.



Пример. Построить в полярной системе координат точки: $M_1\left(\dfrac{\pi}{6};3\right)$, $M_2\left(\dfrac{\pi}{2};2\right)$, $M_3(\pi;4)$, $M_4(0;3)$.

Пример. Построить график функции, заданной в полярных координатах $r = 1 - \cos\varphi$.



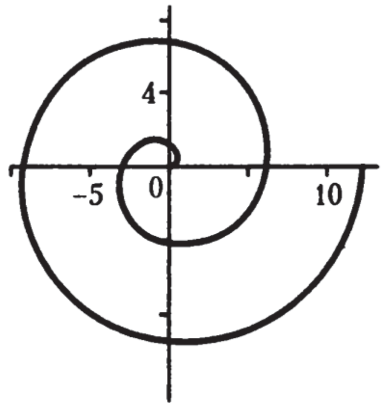
Кривая, описываемая этим уравнением в полярных координатах, называется ***кардиоидой.***

Составив таблицу для некоторых значений полярного угла φ и соответствующих им значений r, построим получившуюся кривую.

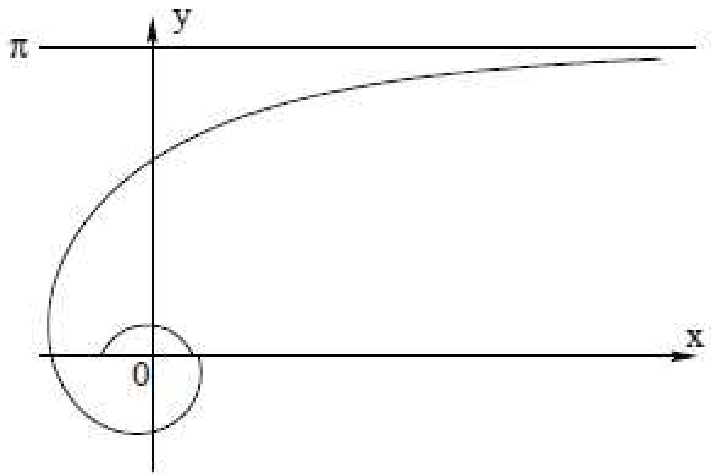
φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
r	0	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	2	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	0

Примеры графиков функций, заданных в полярных координатах:

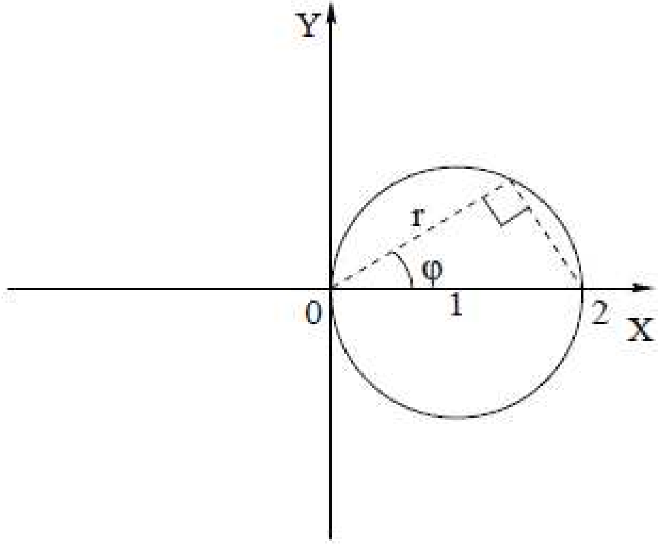
1) Спираль Архимеда: $r = \varphi$



2) Гиперболическая спираль: $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$



3) Окружность: $r = 2\cos\varphi$

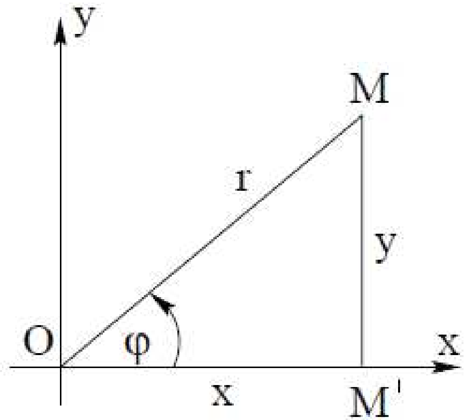


Выведем формулы, связывающие декартовы координаты с полярными.

Расположим полярную ось l совпадающую с осью Ox, а полюс O - с началом координат O.

Из треугольника OMM' находим:

$\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, $r^2 = x^2 + y^2$, откуда



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Приведенные формулы дают зависимость декартовых координат $(x; y)$ от полярных $(\varphi; r)$ и наоборот.

В последней формуле из двух значений угла φ, соответствующих найденной величине $tg\varphi$, выбирается то $(0 \le \varphi < 2\pi)$, при котором удовлетворяется первая система.

Пример. Найти полярные координаты точки $M(1;-1)$.

Решение: По формулам находим $r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, $tg\varphi=-1$,

тогда $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}+n\pi, n\in Z$.

Условию $0\le\varphi<2\pi$, удовлетворяют два значения $\varphi_1=\dfrac{3\pi}{4}$ и $\varphi_2=\dfrac{7\pi}{4}$.

Так как точка $M(1;-1)$ расположена в IV четверти, то выбираем второе значение, т.е. $\varphi=\dfrac{7\pi}{4}$.

Ответ: $M\left(\dfrac{7\pi}{4};\sqrt{2}\right)$

Пример. Изобразить кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $r=\cos 3\varphi$.

Решение. Функция $\cos 3\varphi$ - периодическая с главным периодом $T=\dfrac{2\pi}{3}$.

Достаточно построить кривую для $0\le\varphi<\dfrac{2\pi}{3}$, затем, используя периодичность, построить ее для $\dfrac{2\pi}{3}\le\varphi<\dfrac{4\pi}{3}$ и для $\dfrac{4\pi}{3}\le\varphi<2\pi$.

Построим ту часть кривой, которая расположена в секторе: $0 \le \varphi < \dfrac{2\pi}{3}$.

Функция $r = \cos 3\varphi$ на отрезке $[0;\pi/6]$ монотонно убывает от 1 до 0.
На интервале $(\pi/6;\pi/2)$ $r < 0$, поэтому нет точек линии, расположенных внутри сектора $\pi/6 < \varphi < \pi/2$.
На отрезке $[\pi/2;2\pi/3]$ кривая монотонно возрастает от 0 до 1.
Для $\varphi \in [0;\pi/6] \cup [\pi/2;2\pi/3]$ эскиз кривой представлен на рисунке а).

Строим кривую в других секторах: $\dfrac{2\pi}{3} \le \varphi < \dfrac{4\pi}{3}$ и $\dfrac{4\pi}{3} \le \varphi < 2\pi$, используя периодичность функции $\cos 3\varphi$ (рисунок б)):