

Линейная алгебра и аналитическая геометрия (лекции)

дневное отделение, 1 семестр

Лекция 1. Алгебра матриц. Прямоугольные, квадратные, треугольные и диагональные матрицы. Алгебра матриц: сложение матриц; умножение матрицы на число; перемножение матриц; основные свойства указанных операций. Транспонирование матрицы.

Лекция 2. Определители. Вычисление определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков (правила Саррюса). Миноры и алгебраические дополнения. Определитель n -го порядка. Разложение определителя по строке и столбцу. Основные свойства определителей. Вычисление определителей с помощью их свойств. Определитель произведения квадратных матриц и транспонированной матрицы.

Лекция 3. Формулы Крамера. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. Обратная матрица: определение; алгоритм вычисления. Критерий обратимости матрицы. Решение матричных уравнений систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Лекция 4. Системы линейных уравнений. Ранг матрицы. Основные понятия теории систем линейных алгебраических уравнений: частное решение, общее решение; совместность и несовместность системы; однородные и неоднородные системы; матрица системы и расширенная матрица системы. Запись линейной системы уравнений в матричном и векторном виде.

Лекция 5. Системы линейных уравнений (продолжение). Эквивалентные системы. Элементарные преобразования линейных систем (их матриц). Метод Гаусса решения линейных систем, свободные и базисные неизвестные. Фундаментальная система решений однородной системы. Критерий совместности линейной алгебраической системы (теорема Кронекера–Капелли). Условие существования ненулевого решения у однородной системы. Теорема о структуре общего решения совместной неоднородной системы.

Лекция 6. Геометрические векторы. Вектор как направленный отрезок. Линейные операции над векторами: умножение вектора на число; сложение векторов и их свойства. Проекция вектора на ось. Свойства проекций. Декартовы координаты вектора. Канонические базисы: на плоскости и в пространстве. Деление вектора в заданном отношении. Условие коллинеарности двух векторов.

Лекция 7. Скалярное произведение векторов. Скалярное произведение векторов: определение; свойства; координатное выражение. Условие ортогональности векторов. Компланарные и некомпланарные тройки векторов. Определения правой и левой троек векторов.

Лекция 8. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Векторное произведение векторов: определение; свойства; координатное выражение; геометрический смысл. Условие коллинеарности векторов через векторное произведение. Смешанное произведение векторов: определение; свойства; координатное выражение; геометрический смысл. Условие компланарности тройки векторов.

Лекция 9. Прямая на плоскости. Прямая на плоскости: общее уравнение, уравнение с угловым коэффициентом наклона; каноническое уравнение и параметрические уравнения. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Лекция 10. Плоскость в пространстве. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, параллельно двум неколлинеарным векторам. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой. Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между плоскостями.

Лекция 11. Прямая в пространстве. Взаимное расположение двух прямых, прямой и плоскости в пространстве. Прямая в пространстве: прямая как пересечение двух плоскостей; канонические и параметрические уравнения прямой. Взаимное расположение двух прямых, прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых, прямой и плоскости в пространстве. Угол между прямыми, между прямой и плоскостью. Задачи на пересечение прямой и плоскости, нахождение проекций точек на прямую и плоскость и симметричных точек.

Лекция 12. Кривые второго порядка. Кривые второго порядка на плоскости. Геометрические определения эллипса, гиперболы, параболы. Вывод их канонических уравнений и построение графиков по заданным каноническим уравнениям.

Лекция 13. Поверхности второго порядка. Обзор канонических уравнений эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперболоидов, конуса, эллиптического и гиперболического параболоидов, цилиндров (эллиптического, гиперболического и параболического). Их графики.

Лекция 14. Комплексные числа. Определение комплексных чисел в алгебраической форме. Действительная и мнимая части, изображение на комплексной плоскости. Сопряженные комплексных чисел. Алгебраические операции с комплексными числами: сложение; перемножение; деление комплексных чисел; их свойства. Комплексное сопряжение суммы, произведения; отношения двух комплексных чисел.

Лекция 15. Комплексные числа - продолжение. Модуль и главное значение аргумента. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Формула Эйлера. Показательная (экспоненциальная) форма записи комплексного числа. Возведение в целую степень и извлечение корня натуральной степени из комплексного числа. Формула Муавра.

Лекция 16. Многочлены. Определение многочлена. Сложение, умножение на число и перемножение многочленов. Алгоритм Евклида деления многочлена на многочлен, целая часть, дробная часть и остаток от деления. Теорема Безу. Корни многочлена и их кратность. Основная теорема алгебры многочленов. Разложение многочленов на множители. Многочлены с действительными коэффициентами, их разложение в произведение многочленов на множестве действительных и на множестве комплексных чисел.