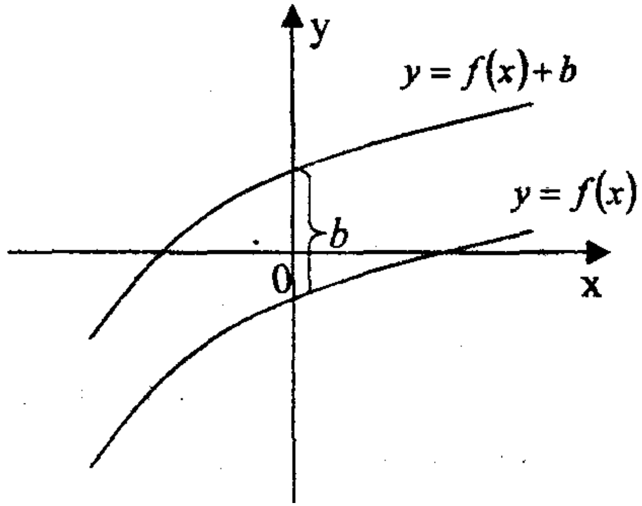
Элементарные преобразования графиков функций

I. Параллельный сдвиг вдоль осей координат

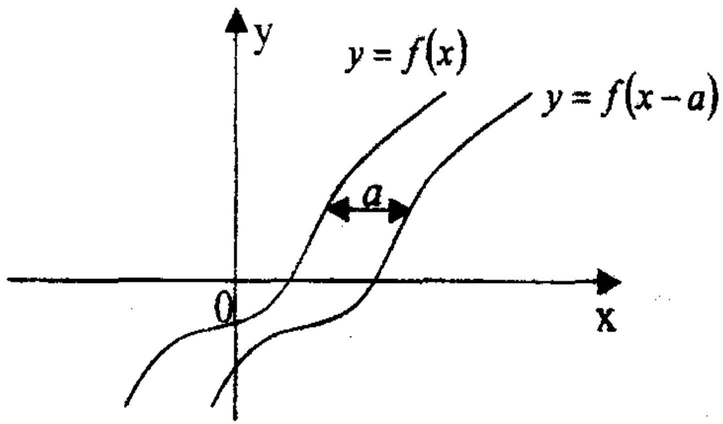
1. Параллельный сдвиг вдоль оси Oy:
$f(x) \to f(x)+b$

График функции $y = f(x)+b$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|b|$ единиц (вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$).



2. Параллельный сдвиг вдоль оси Ox:
$f(x) \to f(x-a)$

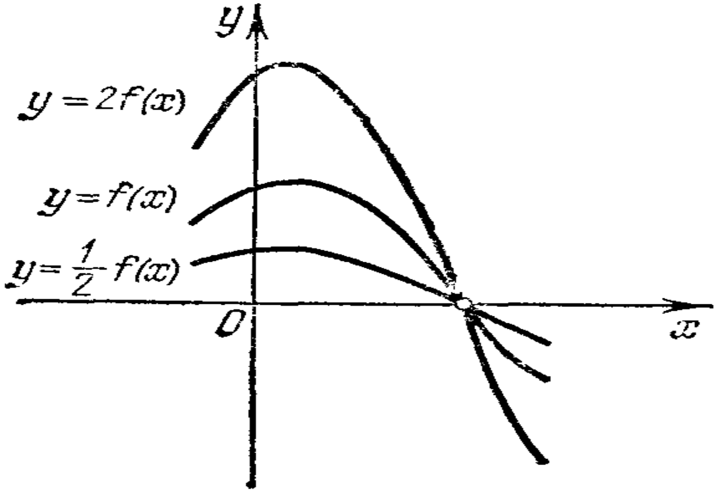
График функции $y = f(x-a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на $|a|$ единиц (вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$).



II. Растяжение/сжатие вдоль осей координат

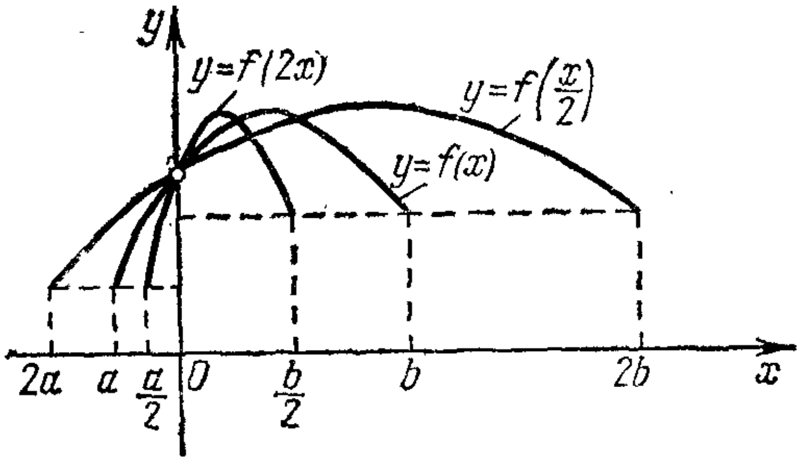
1. *Растяжение/сжатие вдоль оси* Oy: $f(x) \to kf(x)$, $k > 0$

График функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением (сжатием) вдоль оси Oy в k раз ($1/k$ раз), если $k > 1$ $(0 < k < 1)$.



2. *Растяжение/сжатие вдоль оси* Ox: $f(x) \to f(kx)$, $k > 0$

График функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием (растяжением) по оси Ox в k раз ($1/k$ раз), если $k > 1$ $(0 < k < 1)$.

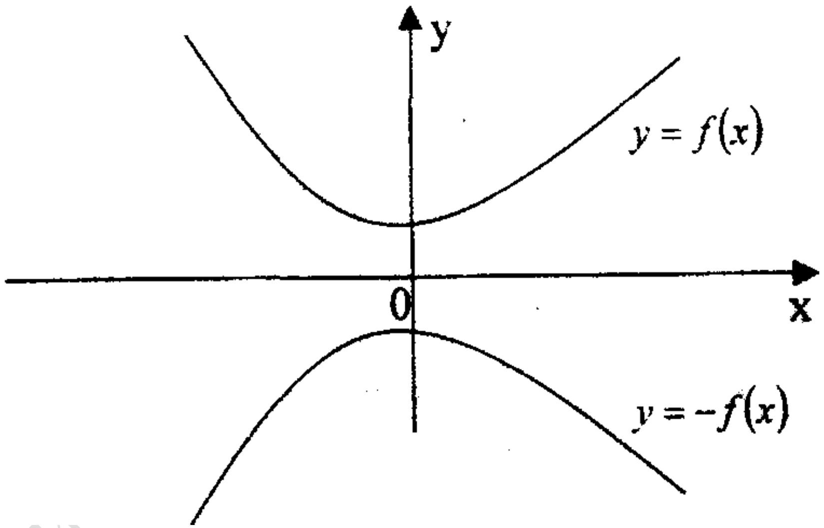


III. Симметричное отражение относительно осей координат

1. Симметричное отражение относительно оси Ox:

$$f(x) \to -f(x)$$

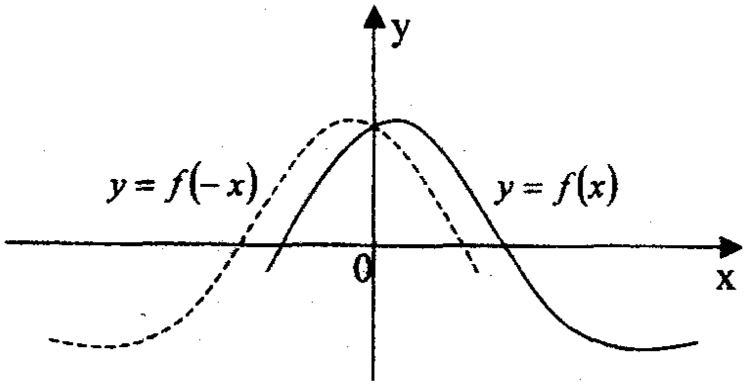
График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Ox.



2. Симметричное отражение относительно оси Oy:

$$f(x) \to f(-x)$$

График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Oy.

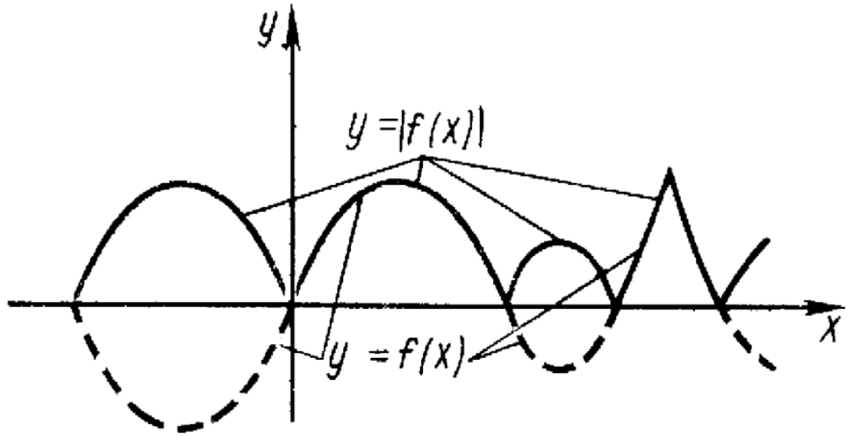


IV. Преобразования, связанные с модулем координат

1. Преобразование вида:

$$f(x) \to |f(x)|$$

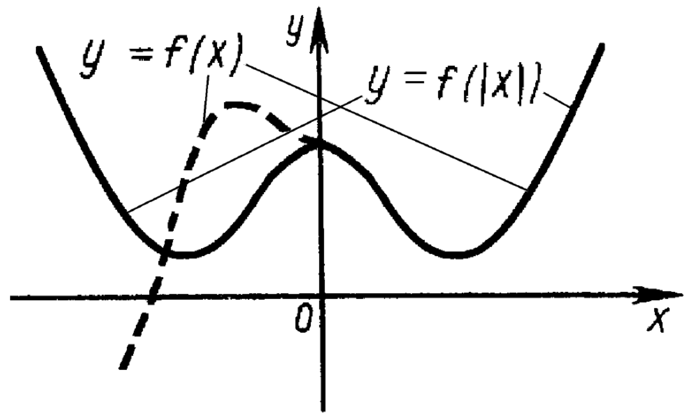
График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика, расположенная ниже оси Ox, симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения.



2. Преобразование вида:

$$f(x) \to f(|x|)$$

График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика, расположенная в области $x > 0$, остается без изменения, а его часть в области $x < 0$ ***удаляется*** и заменяется симметричным отображением относительно оси Oy части графика области $x > 0$.

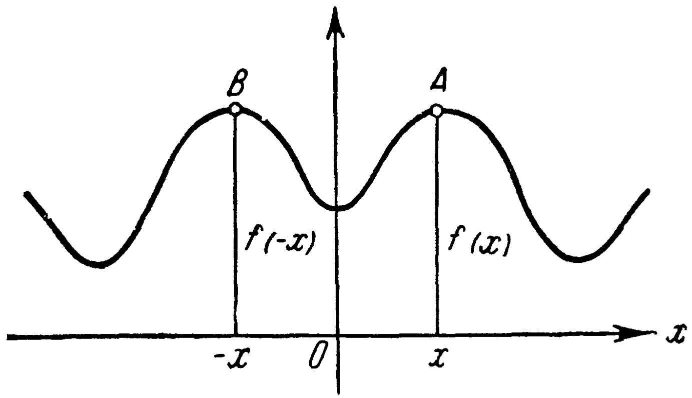


Областью определения заданной в явном виде функции $y = f(x)$ называется множество всех тех значений аргумента x, для которых все указанные в аналитическом выражении $f(x)$ операции выполнимы.

Аналитический вид функции	Условие выполнения операций
$y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$y = \sqrt[2n]{P(x)}$	$P(x) \geq 0$
$\log_{Q(x)} P(x)$	$P(x) > 0,\ Q(x) > 0,\ Q(x) \neq 1$
$y = \operatorname{tg} P(x)$	$P(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$
$y = \operatorname{ctg} P(x)$	$P(x) \neq \pi n$
$y = \arcsin P(x),\ y = \arccos P(x)$	$\lvert P(x) \rvert \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq P(x) \leq 1$

Свойства функций

1. Четность и нечетность функции.



Определение. Множество $X \subset R$ называется ***симметричным*** относительно начала координат, если $-x \in X$ для любого $x \in X$.

Определение. Числовая функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если ее область определения симметрична относительно начала координат и $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in D(f)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Определение. Числовая функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если ее область определения симметрична относительно начала координат и $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in D(f)$.

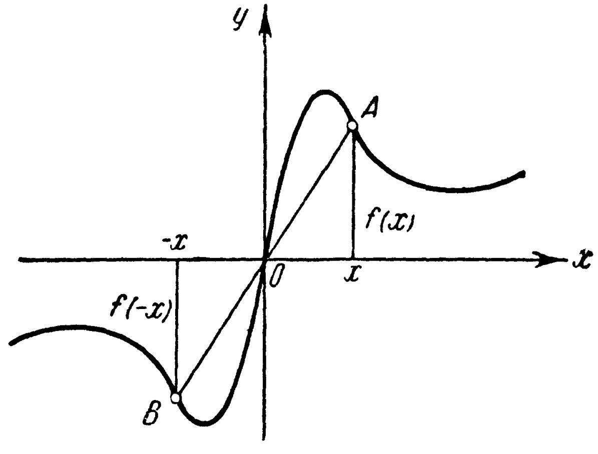


График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется функцией *общего вида.*

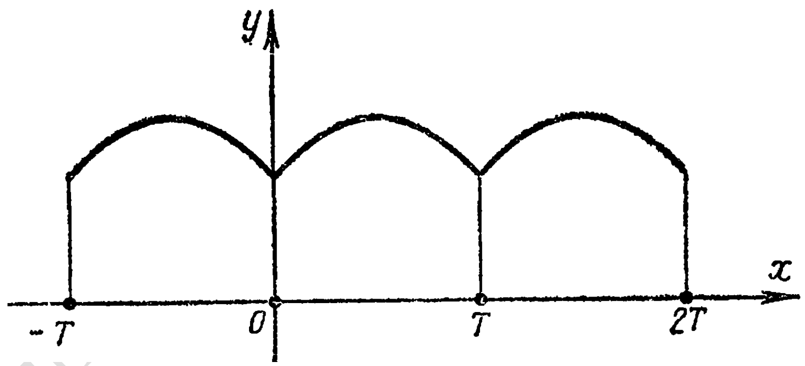
2. Периодичность функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***периодической*** с периодом $T \neq 0$, если $x - T$ и $x + T$ принадлежат области определения функции и $f(x) = f(x \pm T)$ для любого $x \in D(f)$.

Под ***периодом функции*** понимают наименьший из всех положительных периодов, если такой период существует.

Все периоды T кратны наименьшему T_0: $T = nT_0$, где $n \in Z$.

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом T, то ее график переходит сам в себя при сдвиге вдоль Ox на T единиц влево или вправо.



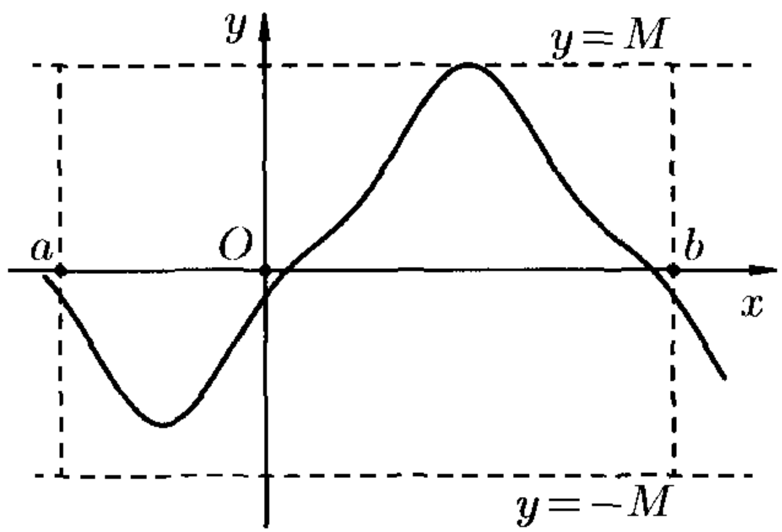
Теорема. Если функция $y = f(x)$ - периодическая с периодом T, то функция $y = Af(kx + l) + B$ будет также периодической с периодом $T_1 = \frac{T}{|k|}$, $k \in R$.

3. Ограниченность функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной сверху (снизу)***, если существует такое число M, что для всех $x \in D(f)$ выполняется неравенство:

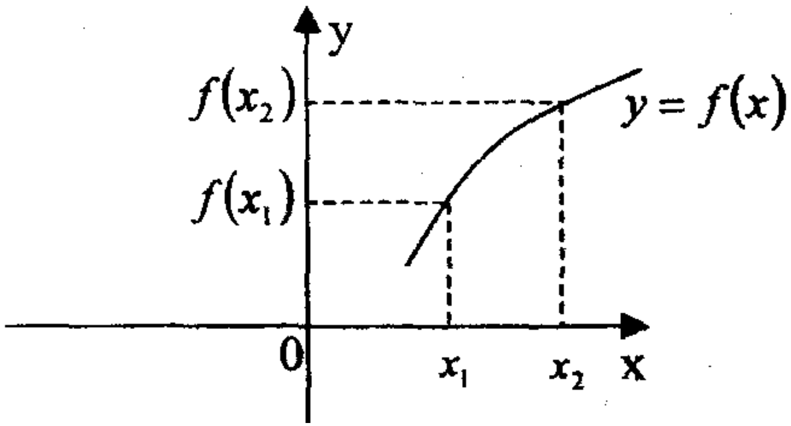
$$f(x) \le M \qquad (f(x) \ge M).$$

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной***, если существует такое число M, что для всех $x \in D(f)$ выполняется неравенство: $|f(x)| \le M$.

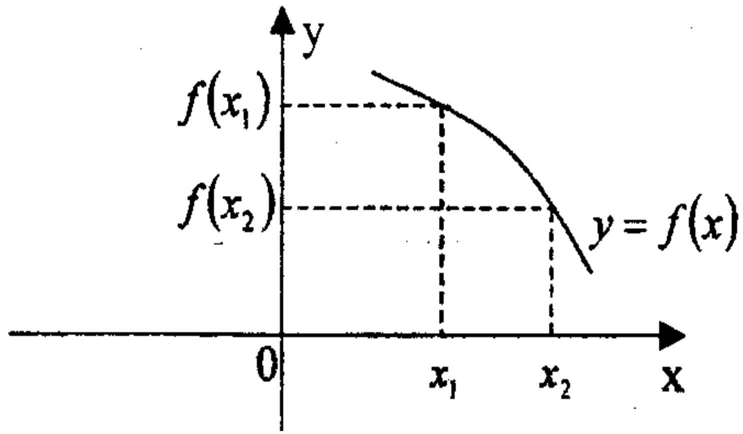


4. Монотонность функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на множестве $X \subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.



Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на множестве $X \subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

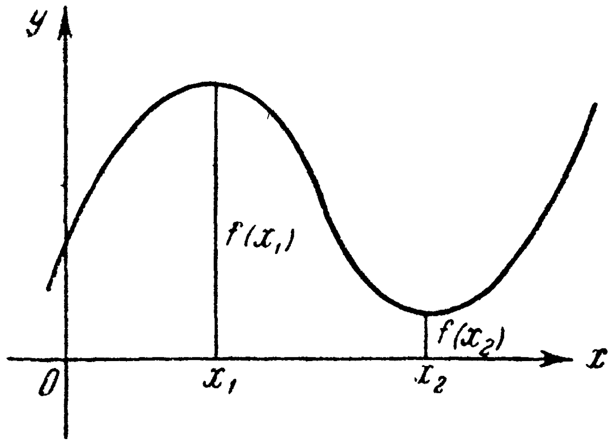


Функция $y = f(x)$ называется ***неубывающей (невозрастающей)*** на множестве $X \subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$ ($f(x_2) \leq f(x_1)$).

Функция называется ***монотонной*** на множестве X (области монотонности), если она является либо возрастающей, либо убывающей на этом множестве.

Определение. Точка x_0 называется ***точкой максимума (минимума)*** функции $y = f(x)$ на некотором множестве $A \subseteq D(f)$, если для всех $x \in A$ выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$ (для максимума) или $f(x_0) \leq f(x)$ (для минимума).

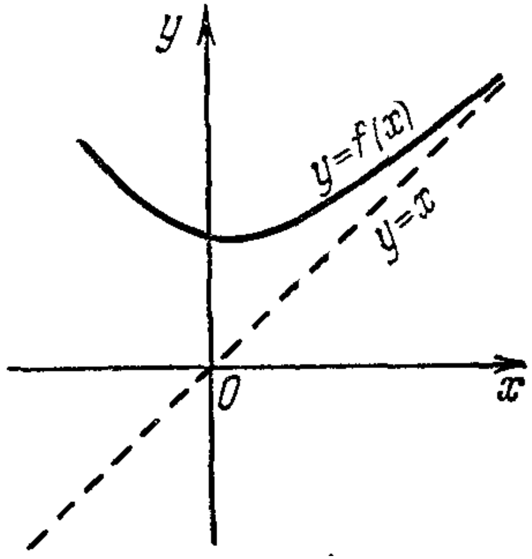
Если указанное множество A представляет собой некоторую окрестность точки x_0, то в этом случае x_0 называется ***точкой локального максимума (локального минимума)*** функции $y = f(x)$.



На рисунке точка x_1 - точка локального максимума, а точка x_2 - точка локального минимума.

Точки локального максимума или минимума называются ***точками экстремума***.

Определение. Прямая линия называется ***асимптотой*** графика функции, если график функции неограниченно сближается с этой прямой при удалении точки графика в бесконечность

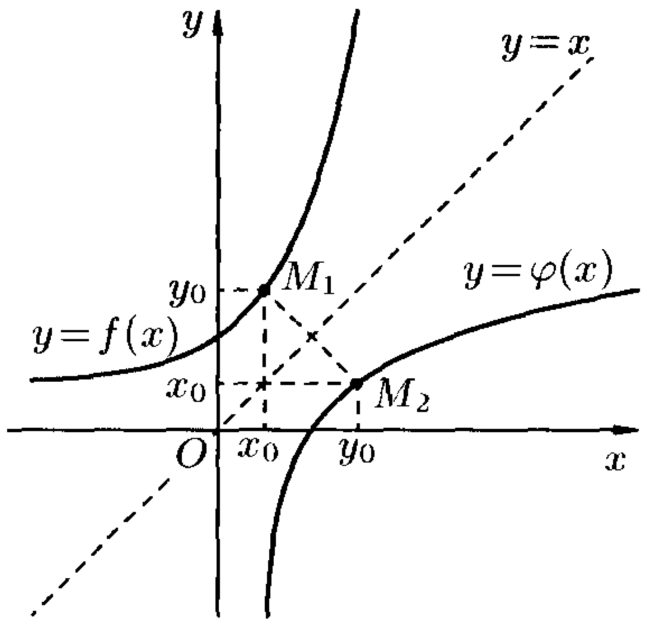


На рисунке прямая $y = x$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$.

5. Обратимость функции и понятие обратной функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***обратимой***, если ***разным*** значениям аргумента $x_1 \neq x_2$ соответствуют ***разные*** значения функции $y_1 \neq y_2$.
Функция является обратимой тогда и только тогда, когда каждое свое значение она принимает только один раз.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.



Основными элементарными функциями являются:

степенная функция: $y = x^a$

показательная функция: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

логарифмическая: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

тригонометрические функции: $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$

обратные тригонометрические функции:

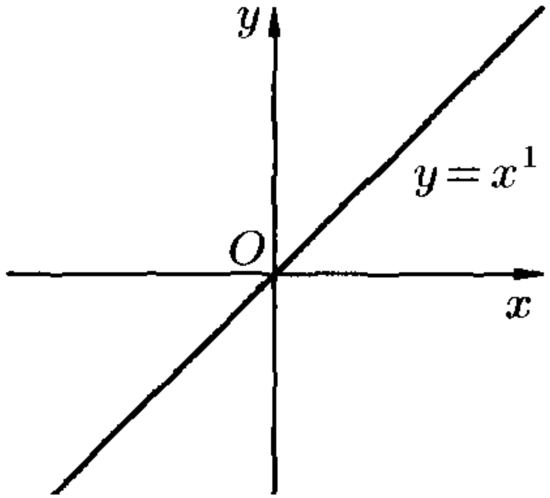
$$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx$$

гиперболические функции:

$$y = \operatorname{sh} x, y = \operatorname{ch} x, y = \operatorname{th} x, y = \operatorname{cth} x$$

Определение. Элементарной называется функция, полученная из основных элементарных функций конечным числом их композиций и арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления).

I. Степенная функция $y = x^a$

1. *Линейная функция* $y = x$ $(a = 1)$. ▪ $D(f) = (-\infty; +\infty)$; ▪ $E(f) = (-\infty; +\infty)$; ▪ точка пересечения с осями координат: $(0;0)$; ▪ функция неограниченная; ▪ функция непериодическая; ▪ функция нечетная (график симметричен относительно начала координат); ▪ функция возрастающая; ▪ функция обратимая (функция обратна сама себе); ▪ графиком функции $y = x$ является прямая.	

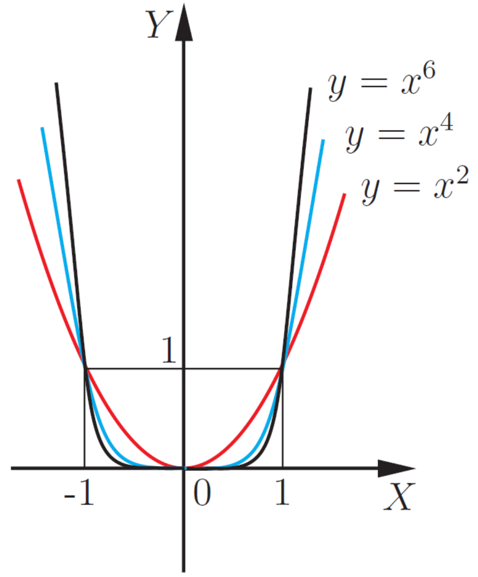
2. *Функция вида* $y = x^n$, $n \in N$, $n > 1$:

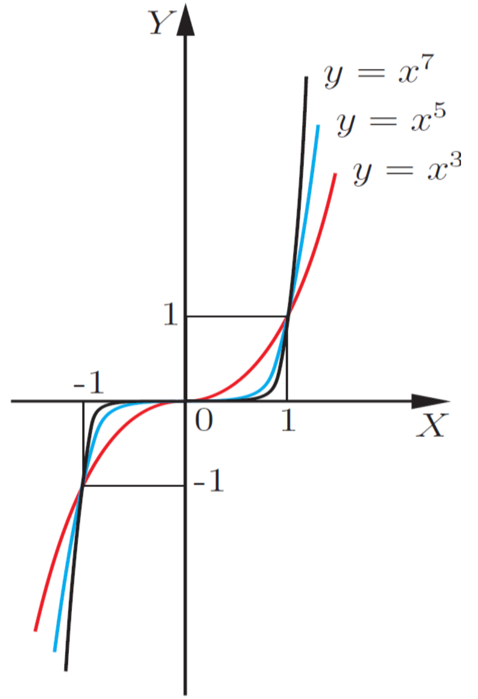
n - четное

- $D(f) = (-\infty;+\infty)$;
- $E(f) = [0;+\infty)$;
- точка пересечения с осью *Oy*: (0;0);
- функция ограничена снизу числом 0;
- функция непериодическая;
- функция четная;
- функция убывает на $(-\infty;0)$;
- функция возрастает на $(0;+\infty)$;
- функция необратимая.

n - нечетное

- $D(f) = (-\infty;+\infty)$;
- $E(f) = (-\infty;+\infty)$;
- точка пересечения с осями: (0;0);
- функция неограниченная;
- функция непериодическая;
- функция нечетная;
- функция возрастающая (значит, обратимая).

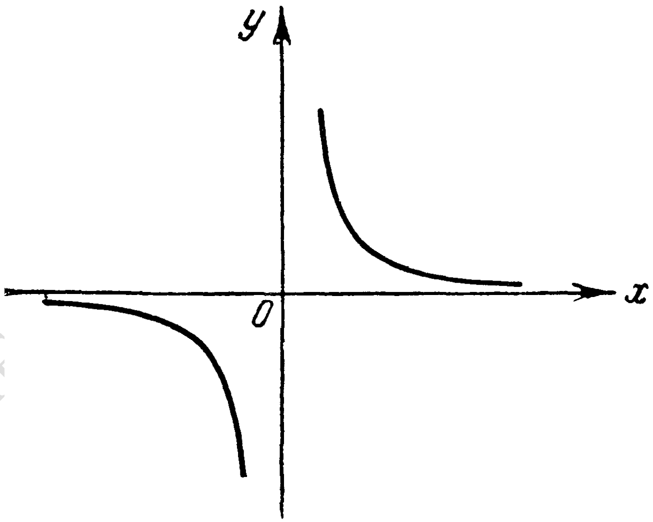




3. Функция вида $y = x^{-n}$, $n \in N$, $n > 1$:

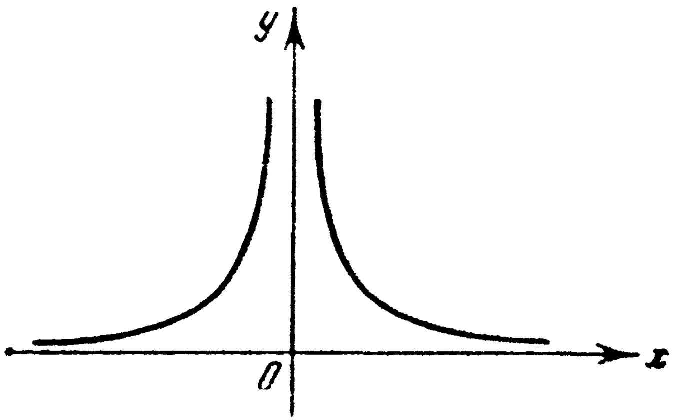
n - нечетное

- $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$;
- $E(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$;
- точек пересечения с осями координат нет;
- функция неограниченная;
- функция непериодическая;
- функция нечетная;
- функция убывает на $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$;
- функция обратимая;
- асимптоты графика - оси координат.



n - четное

- $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$;
- $E(f) = (0;+\infty)$;
- точек пересечения с осями координат нет;
- функция непериодическая;
- функция четная;
- функция убывает на $(0;+\infty)$;
- функция возрастает на $(-\infty;0)$;
- асимптоты графика - оси координат.



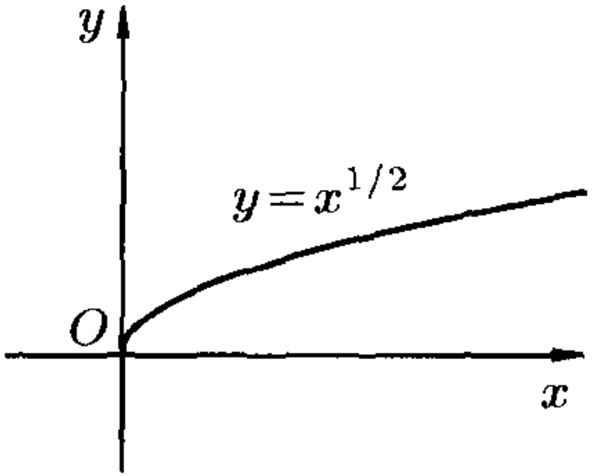
4. *Функция вида* $y=\sqrt[n]{x}$, $n\in N$, $n>1$:

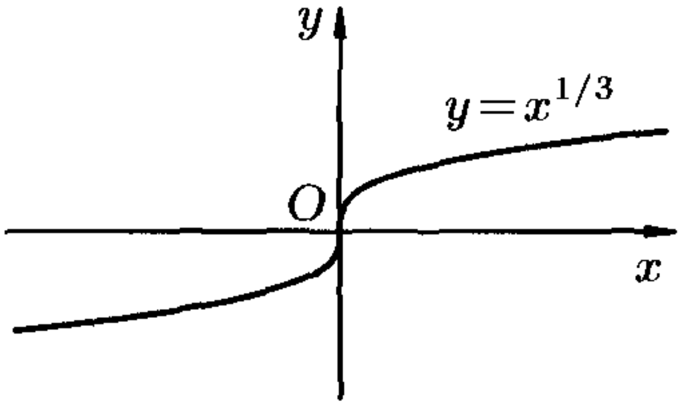
n - четное

- $\mathrm{D}(f)=[0;+\infty)$;
- $\mathrm{E}(f)=[0;+\infty)$;
- точка пересечения с осями координат: $(0;0)$;
- функция ограничена снизу числом 0;
- функция непериодическая;
- функция возрастает на $\mathrm{D}(f)=[0;+\infty)$;
- функция обратимая.

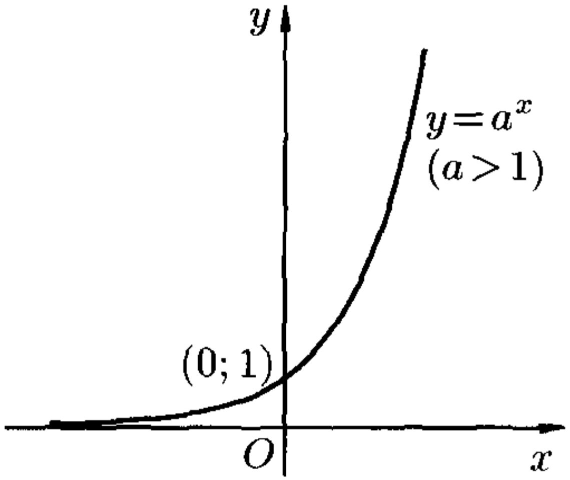
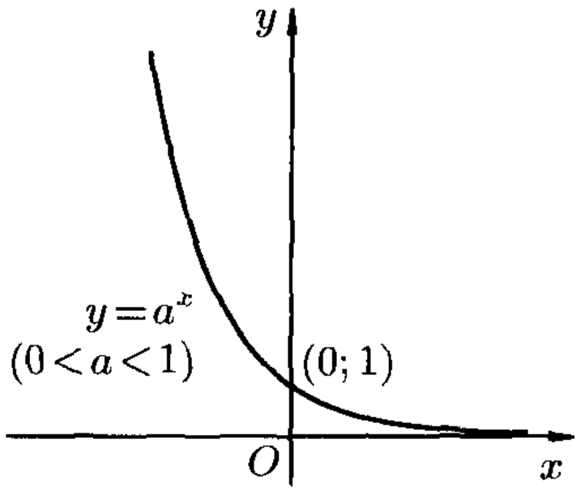
n - нечетное

- $\mathrm{D}(f)=(-\infty;+\infty)$;
- $\mathrm{E}(f)=(-\infty;+\infty)$;
- точка пересечения с осями координат: $(0;0)$;
- функция неограниченная;
- функция непериодическая;
- функция нечетная;
- функция возрастающая;
- функция обратимая.

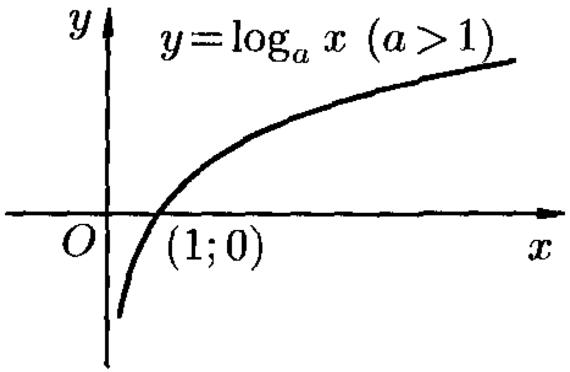
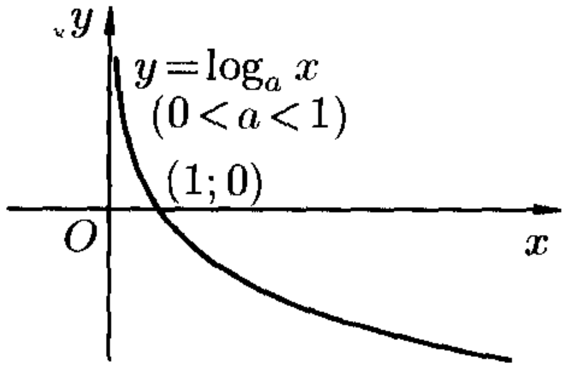




II. Показательная функция $y = a^x, a > 0, a \neq 1$

1. $y = a^x$ $(a > 1)$: ▪ $D(f) = (-\infty; +\infty)$; ▪ $E(f) = (0; +\infty)$; ▪ точка пересечения с осью ординат: $(0;1)$; ▪ функция непериодическая; ▪ функция возрастающая; ▪ функция обратимая; ▪ асимптота графика функции - ось Ox.	
2. $y = a^x$ $(0 < a < 1)$: ▪ $D(f) = (-\infty; +\infty)$; ▪ $E(f) = (0; +\infty)$; ▪ точка пересечения с осью ординат: $(0;1)$; ▪ функция непериодическая; ▪ функция убывает на $(-\infty; +\infty)$; ▪ функция обратимая; ▪ асимптота графика функции - ось Ox.	

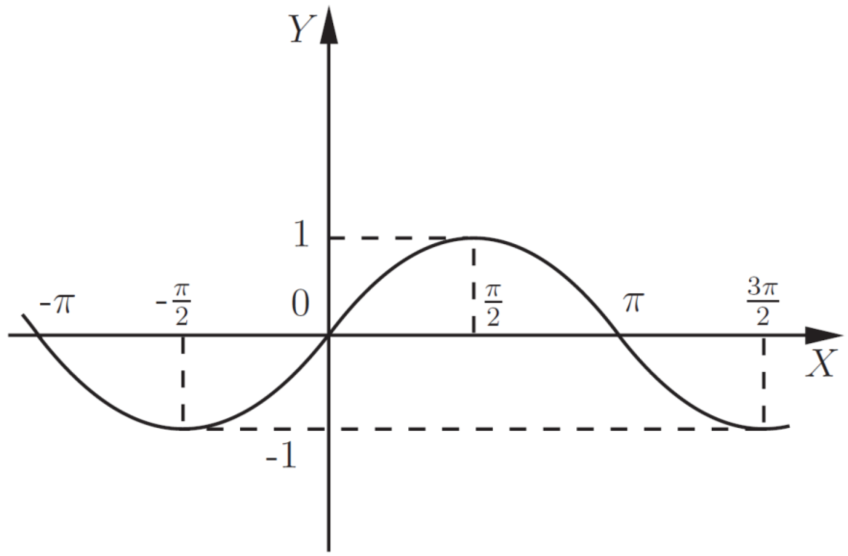
III. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

1. $y = \log_a x$ $(a > 1)$: ▪ $D(f) = (0;+\infty)$; ▪ $E(f) = (-\infty;+\infty)$; ▪ точка пересечения с осью Ox $(1;0)$; ▪ функция неограниченная; ▪ функция непериодическая; ▪ функция возрастает; ▪ функция обратимая; ▪ асимптотой графика функции является ось Oy.	
2. $y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$: ▪ $D(f) = (0;+\infty)$; ▪ $E(f) = (-\infty;+\infty)$; ▪ точка пересечения с осью Ox $(1;0)$; ▪ функция неограниченная; ▪ функция непериодическая; ▪ функция убывает (значит, обратимая); ▪ асимптотой графика функции является ось Oy.	

IV. Тригонометрические функции

1. $y = \sin x$

- $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(f) = [-1; 1]$;
- точки пересечения с осями:
  с осью Ox: $(\pi n; 0), n \in Z$,
  с осью Oy: $(0; 0)$;
- функция ограничена: $|\sin x| \le 1$;
- функция периодическая: $T = 2\pi$;
- функция нечетная;
- функция возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$;
- функция убывает на $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$;
- функция необратимая.

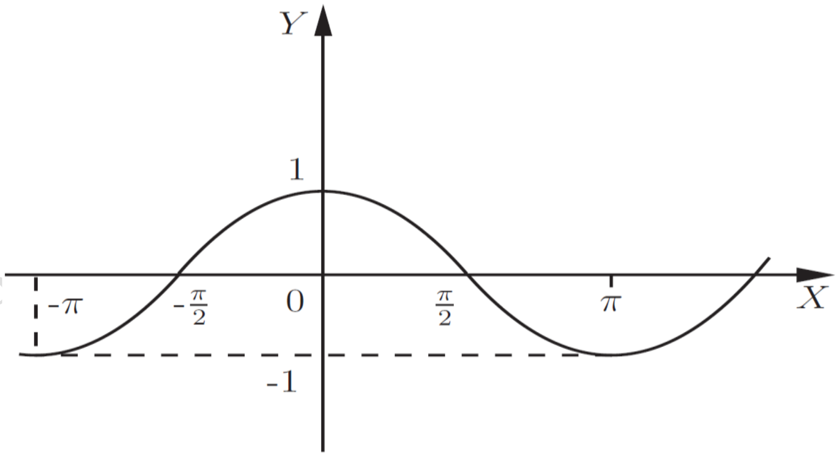


2. $y = \cos x$

- $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(f) = [-1;1]$;
- точки пересечения с осями:

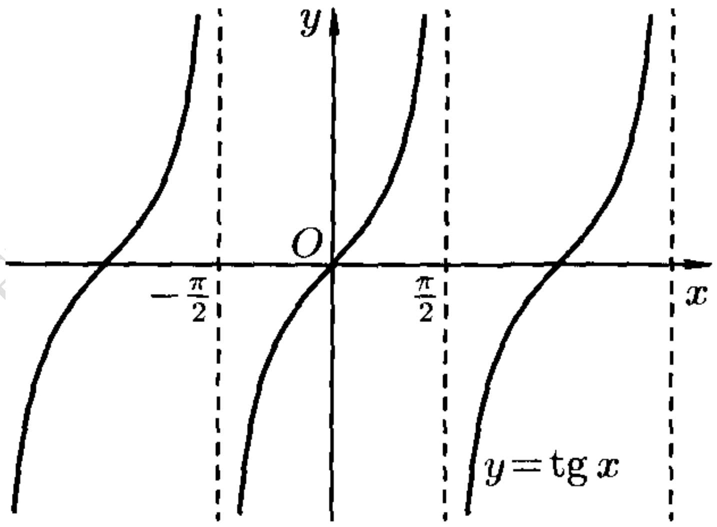
  с осью Ox: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right), n \in Z$,

  с осью Oy: $(0;1)$;
- функция ограничена: $|\cos x| \le 1$;
- функция периодическая: $T = 2\pi$;
- функция четная;
- функция возрастает на $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in Z$;
- функция убывает на $(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in Z$;
- функция необратимая.



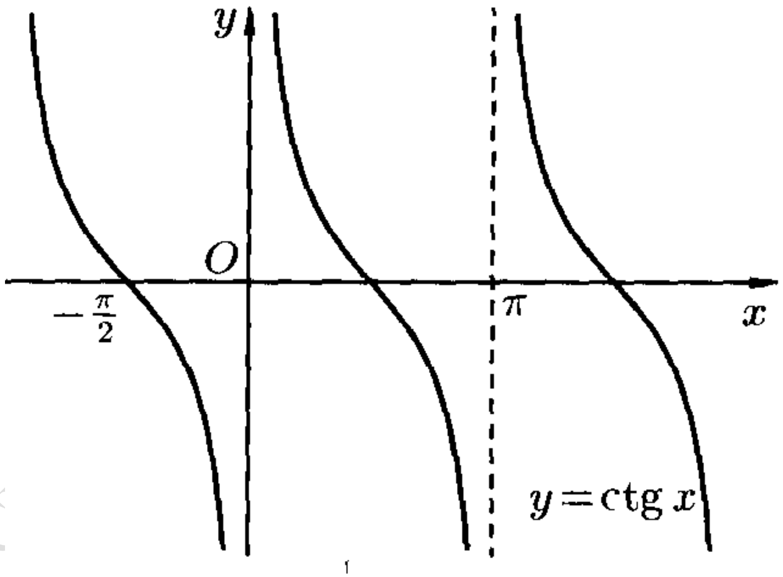
3. $y = tgx$

- $D(f) = (-\infty;+\infty) \setminus \left\{ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right\}$
- $E(f) = (-\infty;\infty)$;
- точки пересечения с осями:
  с осью Ox: $(\pi n;0), n \in Z$,
  с осью Oy: $(0;0)$;
- функция неограниченная;
- функция периодическая $T = \pi$;
- функция нечетная;
- функция возрастает на $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z$;
- функция необратимая;
- асимптотами графика функции является прямые $y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.



4. $y = ctgx$

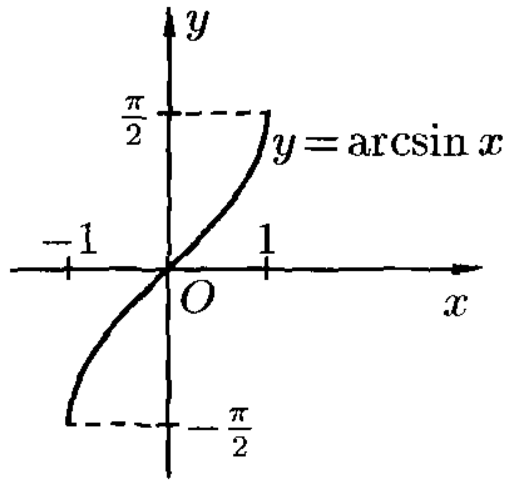
- $D(f) = (-\infty; +\infty) \setminus \{x = \pi n, n \in Z\}$;
- $E(f) = (-\infty; \infty)$;
- точки пересечения с осью Ox
  $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right), n \in Z$;
- функция неограниченная;
- функция периодическая: $T = \pi$;
- функция нечетная;
- функция убывает на $(\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$;
- функция необратимая;
- асимптотами графика функции является прямые $y = \pi n, n \in Z$.



V. Обратные тригонометрические функции

1. $y = \arcsin x$

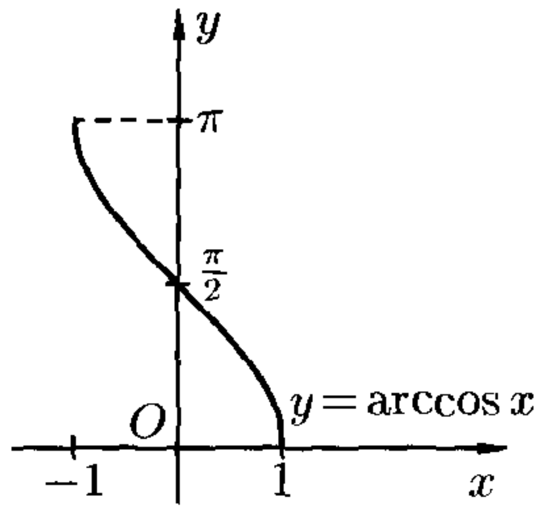
- $D(f) = [-1;1]$;
- $E(f) = [-\pi/2; \pi/2]$;
- точка пересечения с осями $(0;0)$;
- функция ограничена: $|\arcsin x| \le \pi/2$;
- функция нечетная;
- функция возрастает на области определения.



2. $y = \arccos x$

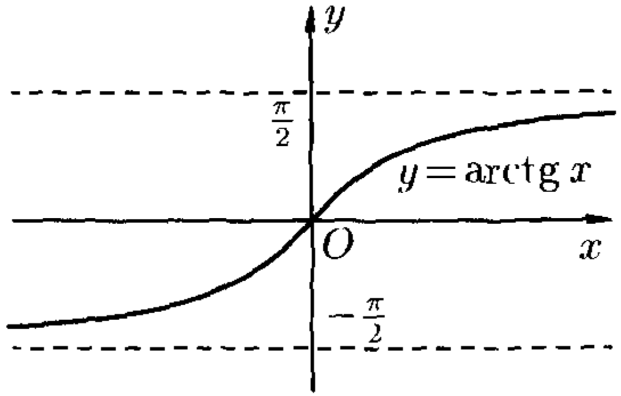
- $D(f) = [-1;1]$;
- $E(f) = [0; \pi]$;
- точки пересечения с осью Ox $(1;0)$, с осью Oy $(0; \pi/2)$;
- функция ограничена: $0 \le \arccos x \le \pi$;
- функция убывает (значит, обратимая);
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$$



3. $y = arctgx$

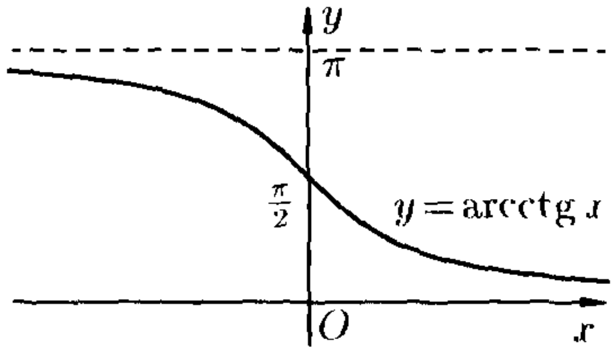
- $\mathrm{D}(f) = (-\infty; +\infty)$;
- $\mathrm{E}(f) = (-\pi/2; \pi/2)$;
- точка пересечения с осями координат: $(0;0)$;
- функция ограничена: $|arctgx| < \pi/2$;
- функция нечетная;
- функция возрастает (значит, обратимая);
- асимптотами графика функции являются прямые $y = \pi/2$ и $y = -\pi/2$.



4. $y = arcctgx$

- $\mathrm{D}(f) = (-\infty; +\infty)$;
- $\mathrm{E}(f) = (0; \pi)$;
- точка пересечения с осью Oy: $(0; \pi/2)$;
- функция ограничена: $0 < arcctgx < \pi$;
- функция убывает (значит, обратимая);
- асимптотами графика функции являются прямые $y = 0$ и $y = \pi$;

$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx$$



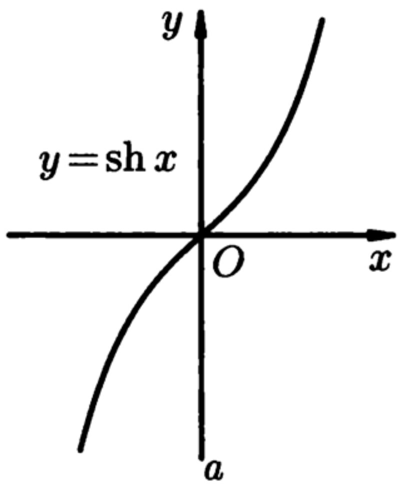
$$arctgx + arcctgx = \pi/2$$

VI. Гиперболические функции

1. гиперболический синус: $y = sh\ x$

$$sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

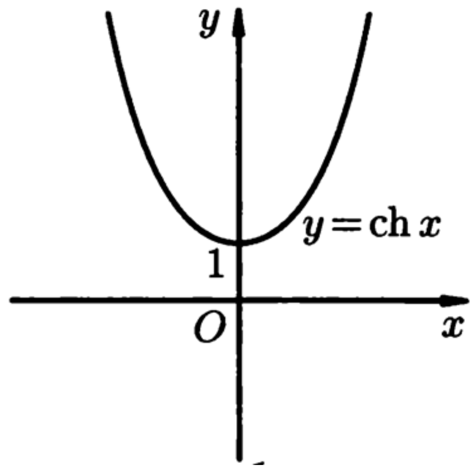
- $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(f) = (-\infty; +\infty)$
- точка пересечения с осями (0;0);
- функция не ограничена
- функция нечетная;
- функция возрастает на области определения.



2. гиперболический косинус: $y = ch\ x$

$$ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

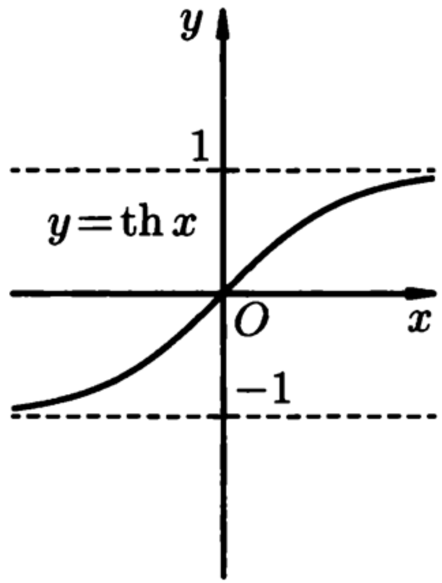
- $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(f) = (1; +\infty)$
- точка пересечения с осями (0;1);
- функция ограничена снизу;
- функция четная;
- функция убывает на $(-\infty; 0)$;
- функция возрастает на $(0; +\infty)$



3. *гиперболический тангенс:* $y = th\,x$

$$th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

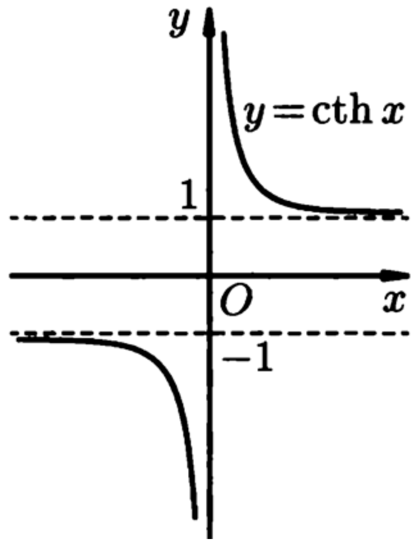
- $D(f) = (-\infty;+\infty)$;
- $E(f) = (-1;1)$
- точка пересечения с осями (0;0);
- функция ограничена;
- функция нечетная;
- функция возрастает на области определения.



4. *гиперболический котангенс:* $y = cth\,x$,

$$cth\,x = \frac{ch\,x}{sh\,x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

- $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$
- $E(f) = (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$
- функция нечетная;
- функция убывает на области определения.



$$ch^2x - sh^2x = 1$$