

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определение. Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел (x, y) .

Алгебраическая форма комплексного числа: $z = x + iy$.

$x = \operatorname{Re}(z)$ – действительная часть, $y = \operatorname{Im}(z)$ – мнимая часть,

i – мнимая единица, $i^2 = -1$.

Сопряжённое комплексное число: $\bar{z} = x - iy$.

Равенство: $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны $\Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Сумма: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Разность: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Произведение: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$, $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

Частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа,

$\varphi = \operatorname{Arg} z$ – аргумент комплексного числа, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$,

$\arg z$ – главное значение аргумента числа z :

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, \quad y - \text{любое;} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0, \quad y - \text{любое;} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, \quad y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

Показательная форма комплексного числа: $z = |z|e^{i \arg z} = re^{i\varphi}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Возведение комплексного числа в целую степень:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi} - \text{формула Муавра.}$$

Извлечение корня из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1.$$