Пример 1

График дробно-рациональной функции.

$$y = \frac{x^3}{(x+2)^2}$$

$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$$

$$\lim_{x \to -2-0} y = -\infty, \ \lim_{x \to -2+0} y = -\infty$$

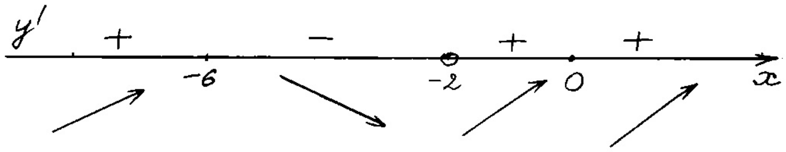
$x = -2$ - вертикальная асимптота

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x(x+2)^2} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^2 = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (y - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{(x+2)^2} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x^2 - 4x}{(x+2)^2} = -4$$

$y = x - 4$ - наклонная асимптота

$$y' = \frac{3x^2(x+2)^2 - 2(x+2)x^3}{(x+2)^4} = \frac{3x^2(x+2) - 2x^3}{(x+2)^3} = \frac{x^3 + 6x^2}{(x+2)^3} = \frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3}$$

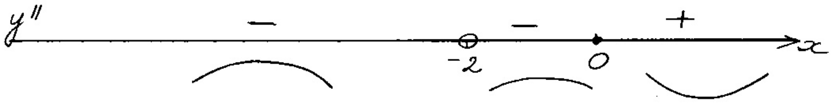


$x = -6$ - точка максимума

$$y_{\max} = y(-6) = \frac{(-6)^3}{(-4)^2} = -\frac{27}{2} = -13.5$$

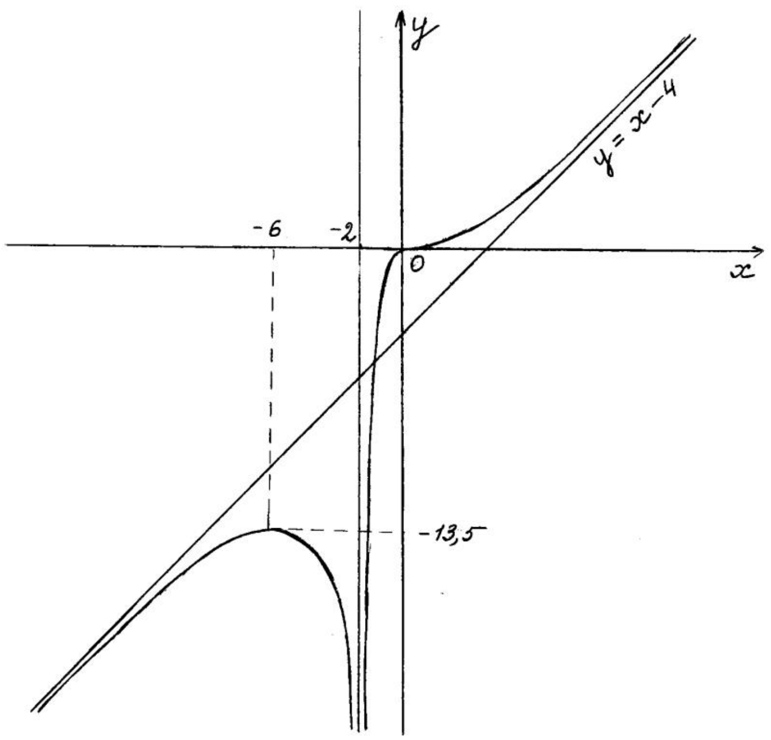
$x = 0$ - не является точкой экстремума

$$y'' = \frac{(3x^2 + 12x)(x+2)^3 - 3(x+2)^2(x^3 + 6x^2)}{(x+2)^6} = \frac{(3x^2 + 12x)(x+2) - 3(x^3 + 6x^2)}{(x+2)^4} = \frac{24x}{(x+2)^4}$$



$x = 0$ - точка перегиба, $y_{пер} = y(0) = 0$

x	$(-\infty; -6)$	-6	$(-6; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+	0	−	$\nexists$	+	0	+
y''	−		−	$\nexists$	−	0	+
y		$y_{max} = -13,5$		$x = -2$ в. а.		$y_{пер} = 0$	



Пример 2

График иррациональной функции.

$$y = \sqrt{x^2+4} + \frac{10}{\sqrt{x^2+4}}$$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$, $y > 0$ при всех x

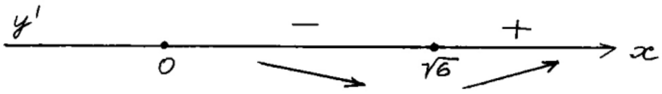
$y(-x) = y(x)$ для любого $x \Rightarrow$ $y(x)$ - четная фукция. Достаточно рассмотреть $x \in [0; +\infty)$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + \frac{10}{x\sqrt{x^2+4}} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4} + \frac{10}{\sqrt{x^2+4}} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} + \frac{10}{\sqrt{x^2+4}} \right) = 0$$

$y = x$ - наклонная асимптота

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{10x}{(x^2+4)^{3/2}} = \frac{x(x^2+4) - 10x}{(x^2+4)^{3/2}} = \frac{x^3 - 6x}{(x^2+4)^{3/2}} = \frac{x(x^2-6)}{(x^2+4)^{3/2}}$$



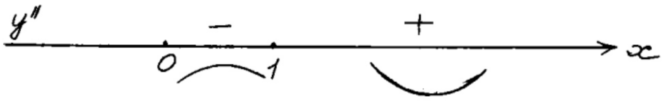
$x=0$ - точка максимума

$y_{\max}=y(0)=7$

$x=\sqrt{6}$ - точка минимума

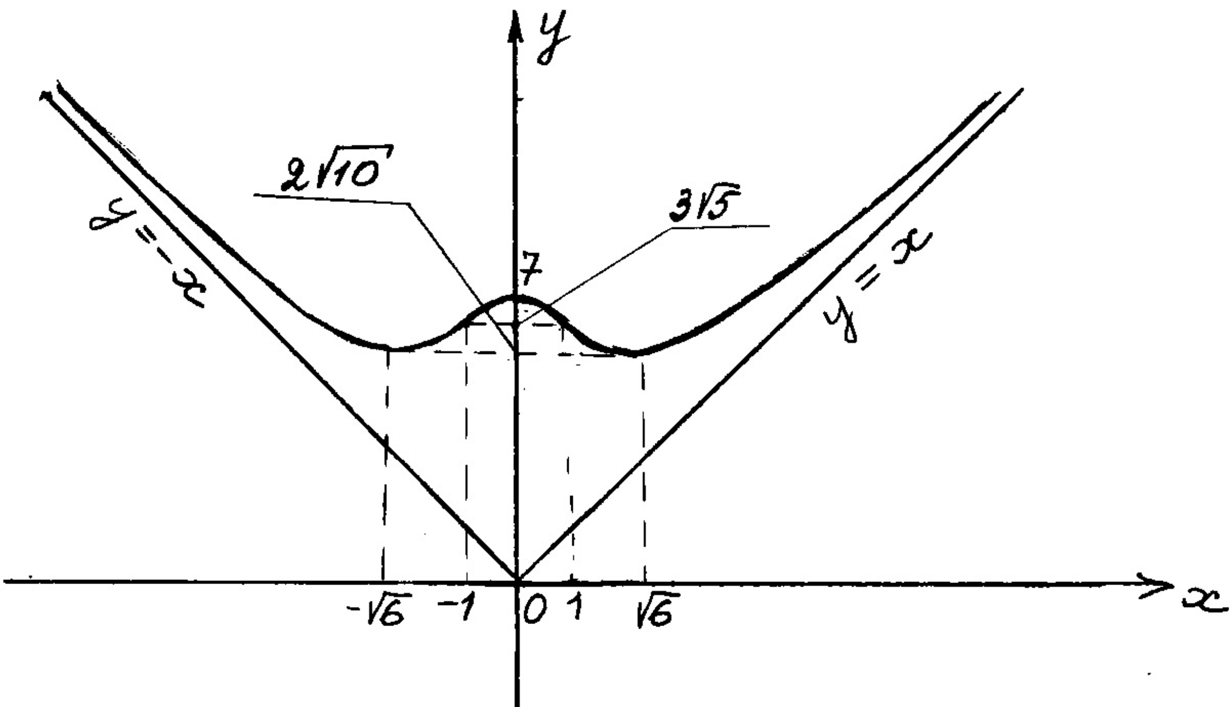
$y_{\min}=y\left(\sqrt{6}\right)=2\sqrt{10}$

$$y''=\frac{(3x^2-6)(x^2+4)^{3/2}-\frac{3}{2}(x^2+4)^{1/2}\cdot 2x(x^3-6x)}{(x^2+4)^3}=\frac{(3x^2-6)(x^2+4)-3x(x^3-6x)}{(x^2+4)^{3/2}}=\frac{24(x^2-1)}{(x^2+4)^{3/2}}$$



$x=1$ - точка перегиба, $y_{пер}=y(1)=3\sqrt{5}$

x	0	$(0;1)$	1	$(1;\sqrt{6})$	$\sqrt{6}$	$(\sqrt{6};+\infty)$
y'	0	$-$		$-$	0	$+$
y''		$-$	0	$+$		$+$
y	$y_{max}=7$		$y_{пер.}=3\sqrt{5}$		$y_{min}=2\sqrt{10}$	



Пример 3

График функции общего вида.

$$y = x^2 \ln x$$

$D(y) = (0; +\infty)$

$y < 0$, если $x \in (0;1)$, $y = 0$, если $x = 1$, $y > 0$, если $x > 1$

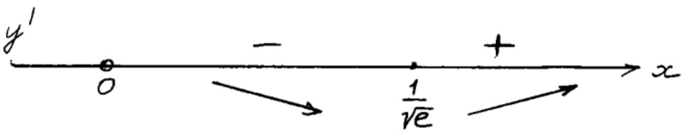
$$\lim_{x\to 0+0} y = \lim_{x\to 0+0} (x^2 \ln x) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x\to 0+0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x\to 0+0} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} \right) = \lim_{x\to 0+0} \left(-\frac{x}{2} \right) = 0$$

$(0;0)$ - граничная точка графика функции.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} (x \ln x) = \infty \;\; \Rightarrow$ асимптот нет

$y' = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1)$

$y' = 0$, если $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

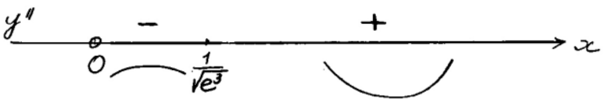


$x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ - точка минимума, $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}} \right) = -\dfrac{1}{2e}$

$\lim\limits_{x\to 0+0} y' = \lim\limits_{x\to 0+0} \left(\dfrac{2\ln x + 1}{\frac{1}{x}} \right) = 0 \Rightarrow$ график касается оси x в точке $(0;0)$.

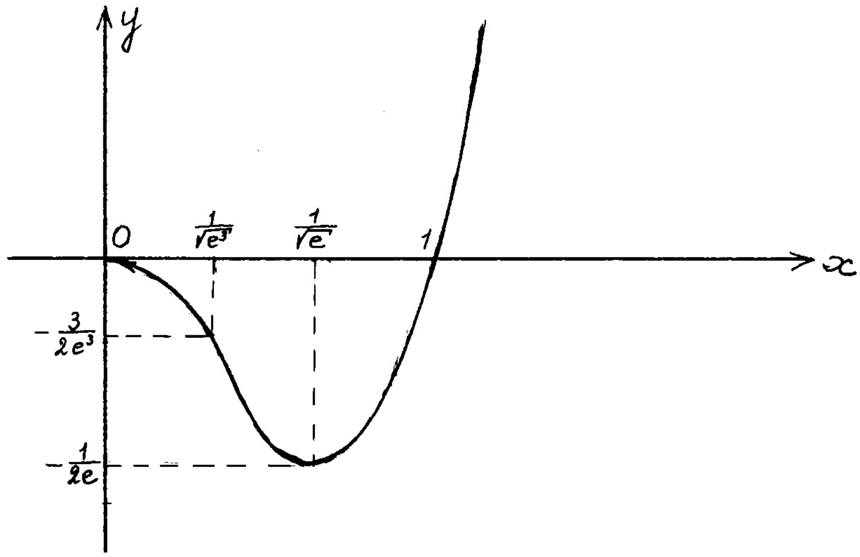
$y'' = 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3$

$y'' = 0$, если $x = e^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$



$x = \dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$ - точка перегиба, $y_{пер} = y\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^3}} \right) = -\dfrac{3}{2e^3}$

x	$(0; \frac{1}{\sqrt{e^3}})$	$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$	$(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; \frac{1}{\sqrt{e}})$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty)$
y'	−		−	0	+
y''	−	0	+		+
y		$y_{пер.} = -3/2e^3$		$y_{min} = -1/2e$	



y
0
$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$
$\frac{1}{\sqrt{e}}$
1
x
$-\frac{3}{2e^3}$
$-\frac{1}{2e}$