ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

РТУ МИРЭА
Кафедра ВМ-3

Горшунова Т.А.

Лекция № 9

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

- Параметрическое и каноническое уравнения прямой на плоскости
- Уравнение прямой проходящей через две точки
- Уравнение прямой в отрезках
- Нормальное и общее уравнения прямой
- Переход от канонического уравнения к общему уравнению прямой
- Уравнение прямой с угловым коэффициентом
- Угол между прямыми. Точка пересечения прямых

31 октября 2023 г.

9.1 Параметрические уравнения прямой

Так как координаты вектора $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ и известны координаты вектора $\vec{s} = (m; n)$, то можно записать векторное уравнение прямой (8.1) в координатах:

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot m, \\ y - y_0 = t \cdot n. \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = m \cdot t + x_0, \\ y = n \cdot t + y_0. \end{cases}} \qquad (9.1)$$

Полученную систему (9.1) называют *параметрическими уравнениями прямой.*

Пример 9.1. Написать параметрические уравнения прямой AB, если $A(-1; 3)$ и $B(2; 7)$.

Решение. Найдем направляющий вектор прямой:

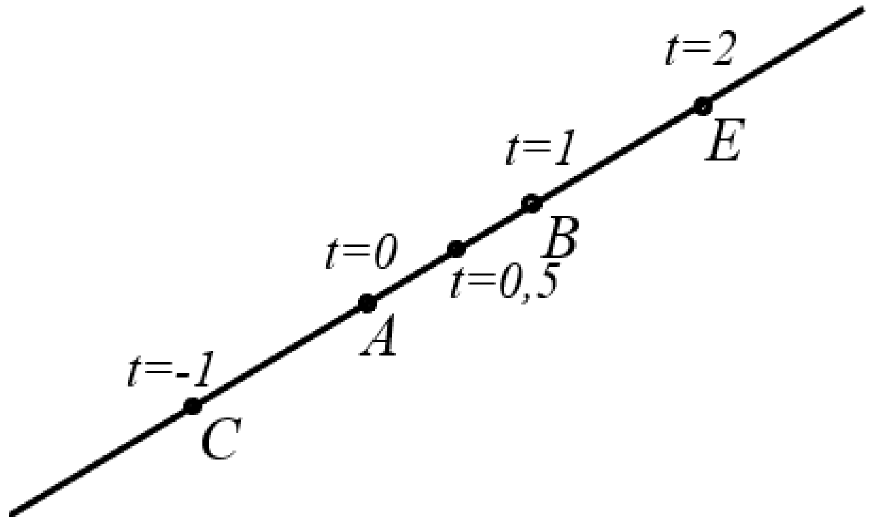
$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-1); 7 - 3) = (3; 4).$$

В качестве точки на прямой возьмем точку $A(-1; 3)$. Подставляя эти данные в параметрические уравнения прямой, получим:

$$\begin{cases} x = 3t + (-1), \\ y = 4t + 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t - 1, \\ y = 4t + 3. \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

Изучим, в каком смысле эта система уравнений определяет прямую.

При $t = 0$ получаем значение координат $x = -1$, $y = 3$ – это точка A. Значению параметра $t = 1$ соответствует точка $B(2; 7)$, значению $t = \frac{1}{2}$ соответствует точка, находящаяся в середине отрезка AB. Значению $t = -1$ отвечает точка C, расположенная симметрично точке B относительно A.



Когда параметр t пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, соответствующая точка последовательно занимает все промежуточные положения на прямой.

Обратно, зная координаты произвольной точки плоскости, по параметрическому уравнению можно определить, лежит ли данная точка на прямой и, если да, то какому значению параметра эта точка соответствует.

Например, для точки $D(2;6)$ получаем: $\begin{cases} 2 = 3t - 1, \\ 6 = 4t + 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = \frac{3}{4}. \end{cases} \Rightarrow$ система противоречива, и точка D не лежит на прямой.

Для точки $E(5;11)$ получаем: $\begin{cases} 5 = 3t - 1, \\ 11 = 4t + 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t = 2. \end{cases} \Rightarrow$ точка E лежит на прямой и отвечает значению $t = 2$.

9.2 Каноническое уравнение прямой

Выражая параметр t из каждого уравнения параметрической системы (9.1), получим

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{m}, \\ t = \dfrac{y - y_0}{n}. \end{cases} \Rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (9.2)$$

Равенство (8.4) – *каноническое уравнение* прямой, проходящей через точку с координатами $(x_0; y_0)$, параллельно вектору $\vec{s} = (m; n)$.

Пример 9.2. Дано каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 3}{4}.$$

1) Через какую точку проходит данная прямая и какие координаты имеет ее направляющий вектор?
2) Записать параметрические уравнения данной прямой, проверить лежит ли точка $A(0; -5)$ на этой прямой, в случае положительного ответа, найти значение параметра, соответствующее данной точке.

Решение.

1) Данное уравнение является каноническим уравнением прямой, тогда

$$x_0 = -2,\ y_0 = 3,\ m = -1,\ n = 4.$$

Следовательно, прямая проходит через точку $M_0(-2; 3)$, параллельно вектору

$\vec{s} = (-1; 4)$ – направляющий вектор прямой.

2) Из канонического уравнения прямой получим параметрические уравнения:

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{4} = t \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{-1} = t, \\ \dfrac{y-3}{4} = t. \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} x = -t - 2, \\ y = 4t + 3. \end{cases}$ $t \in (-\infty; +\infty)$ – параметрические уравнения прямой.

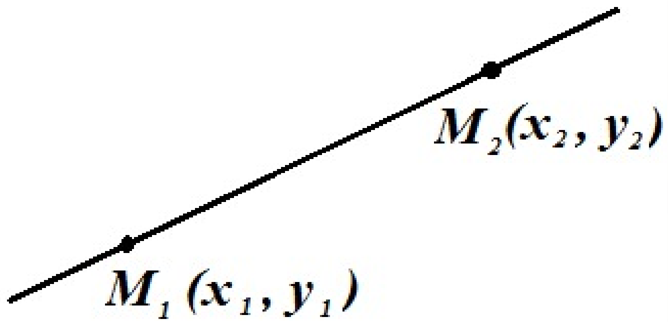
Подставим координаты точки $A(0; -5)$ в уравнения прямой:

$$\begin{cases} 0 = -t - 2 \\ -5 = 4t + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t = 2 \\ 4t = -8 \end{cases} \Rightarrow \text{система совместна,}$$

следовательно точка $A(0; -5)$ лежит на прямой и $t = -2$ – соответствующее значение параметра.

9.3. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, лежащие на прямой l.



Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, являющийся направляющим вектором данной прямой.

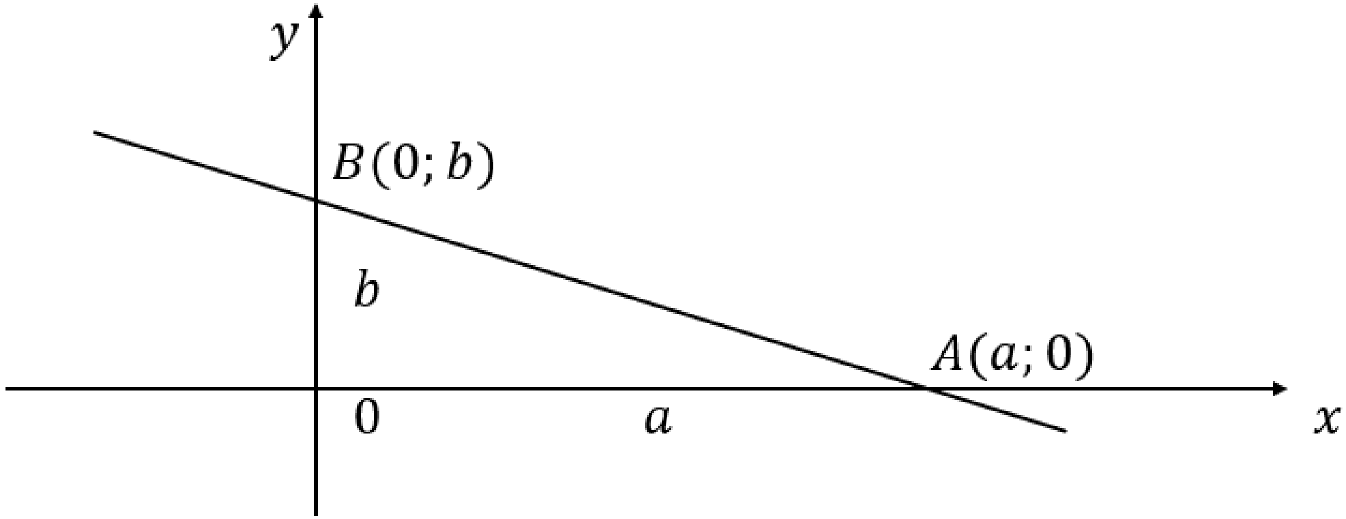
Тогда можно записать каноническое уравнение прямой l, используя в качестве $(x_0; y_0)$ координаты точки M_1 или M_2:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (9.3)}$$

Равенство (9.3) – *уравнение прямой, проходящей через две заданные точки*.

9.4. Уравнение прямой в отрезках

Найдем уравнение прямой по отрезкам $a \neq 0$ и $b \neq 0$, отсекаемым прямой на осях координат.



Прямая проходит через точки $A(a;0)$ и $B(0;b)$, тогда, согласно формуле (8.5), уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}\Rightarrow -\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b}\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (9.4)}$$

Равенство (9.4) – *уравнение прямой в отрезках*.

Пример 9.3. Вычислите площадь треугольника, отсекаемого прямой AB от координатного угла, если $A(5;-2)$ и $B(-1;4)$.

Решение. Запишем уравнение прямой AB, используя формулу (8.5):

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \frac{x-5}{-1-5}=\frac{y+2}{4+2} \Rightarrow \frac{x-5}{-6}=\frac{y+2}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{x-5}{-1}=\frac{y+2}{1}.$$

Найдем уравнение в отрезках:

$$\frac{x-5}{-1}=\frac{y+2}{1} \Rightarrow x-5=-y-2 \Rightarrow x+y=3 \Rightarrow$$

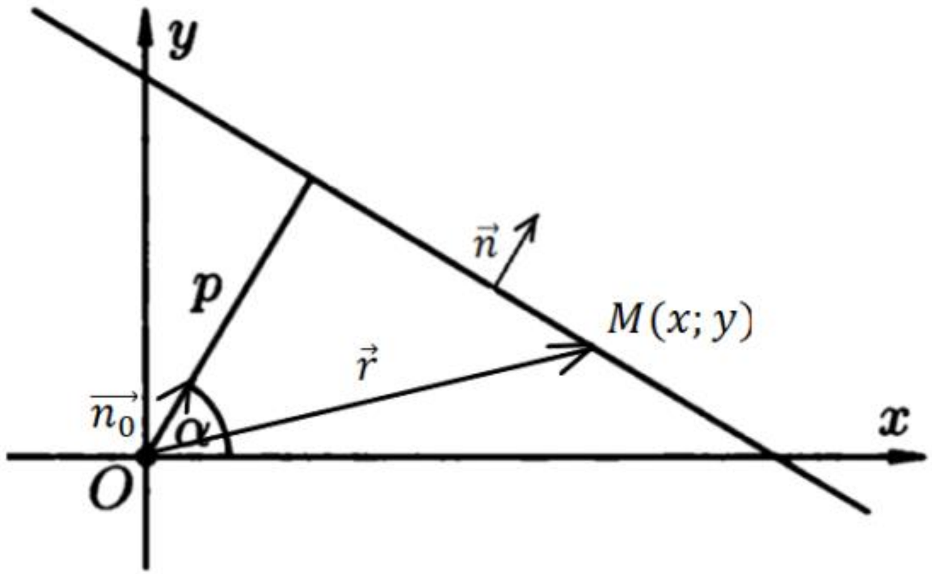
$$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1.$$

Прямая отсекает от координатных осей отрезки одинаковой длины равной 3, проходя через точки $A_1(3;0)$ и $B_1(0;3)$.

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}OA_1\cdot OB_1=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=4{,}5.$$

9.5. Нормальное и общее уравнения прямой

Положение произвольной прямой l на плоскости можно определить, если задать p – расстояние до прямой от точки O – начала координат и вектор $\vec{n}$ перпендикулярный прямой l (вектор $\vec{n}$ образует с осью Ox угол α).



Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный заданной прямой, называется *вектором нормали* прямой.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{n_0} = \overrightarrow{e_n}$ – единичный вектор нормали:

$$|\overrightarrow{n_0}| = 1 \text{ и } \overrightarrow{n_0} = \{\cos\alpha\,; \sin\alpha\}.$$

Если точка $M(x;y)$ – текущая точка прямой l, то проекция ее радиус-вектора на вектор $\overrightarrow{n_0}$ есть величина постоянная и равна p:

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{n_0}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{n_0} = \vec{r}\cdot\overrightarrow{n_0} = p \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r}\cdot\overrightarrow{n_0} - p = 0 \qquad (9.5)}$$

Уравнение (9.5) называется *нормальным (нормированным) уравнением прямой в векторной форме*.

Так как $\overrightarrow{n_0} = \{\cos\alpha\,; \sin\alpha\}$ и $\vec{r} = \{x; y\}$, то имеем:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (9.6)$$

Равенство (9.6) – *нормальное уравнение прямой* в координатной форме.

Замечание 9.1. Уравнение (9.6) является уравнением первого порядка относительно x и y. Таким образом, в прямоугольной декартовой системе координат любая прямая на плоскости определяется уравнением первого порядка относительно переменных x и y. Верно и обратное.

Теорема 9.1. Любое уравнение первого порядка относительно переменных x и y определяет на плоскости прямую.

►Рассмотрим уравнение первого порядка общего вида относительно переменных x и y:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0\,.$$

Умножим обе части этого уравнения на множитель μ:

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$$

и подберем μ таким образом, чтобы получилось нормальное уравнение прямой вида (9.6).

Пусть $\mu A = \cos\alpha$, $\mu B = \sin\alpha$, $\mu C = -p \Rightarrow$

$$\mu^2(A^2 + B^2) = 1 \Rightarrow \mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Из условия $\mu C = -p$ следует, что знак множителя μ надо брать противоположным знаку свободного члена C.

Подставив полученное значение μ в формулы: $\mu A = \cos\alpha$, $\mu B = \sin\alpha$, $\mu C = -p$, найдем $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и p, и можем записать нормальное уравнение прямой.

Таким образом, уравнение

$$\boxed{Ax + By + C = 0 \qquad (9.7)}$$

определяет прямую.◄

Уравнение (9.7) называется *общим уравнением прямой на плоскости*, а множитель μ называют *нормирующим множителем* для данного уравнения прямой.

***Замечание* 9.2.** Коэффициенты A и B являются координатами вектора нормали прямой, задаваемой уравнением (9.7):

$$\vec{n} = \{A, B\}.$$

Пример 9.4. Привести общее уравнение прямой $-2x + y + 5 = 0$ к нормальному виду. Найти расстояние от начала координат до этой прямой.

Решение. Найдем нормирующий множитель $\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Так как $C = 5 > 0 \Rightarrow$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} .$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \mu = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Приведем общее уравнение прямой $-2x + y + 5 = 0$ к нормальному виду:

$$(-2x + y + 5) \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \sqrt{5} = 0$ – нормальное уравнение прямой и $p = \sqrt{5}$ – расстояние от начала координат до прямой.

9.6. Переход от канонического уравнения к общему уравнению прямой

В каноническом уравнении избавимся от знаменателей и перенесем все члены по одну сторону от знака равенства:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow$$

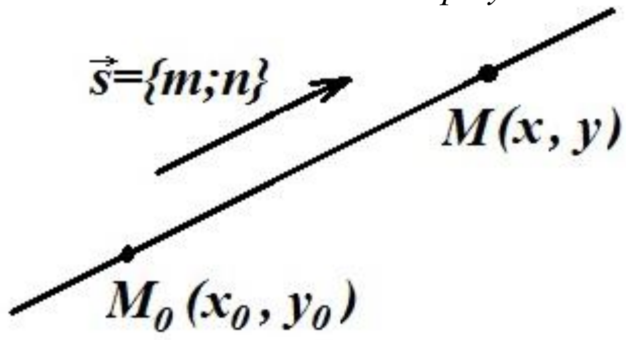
$$n(x - x_0) = m(y - y_0) \Rightarrow nx - nx_0 - my + my_0 = 0 \Rightarrow$$

$$nx - my + (my_0 - nx_0) = 0.$$

Вводя новые обозначения: $n = A,\ -m = B$ и $my_0 - nx_0 = C$,

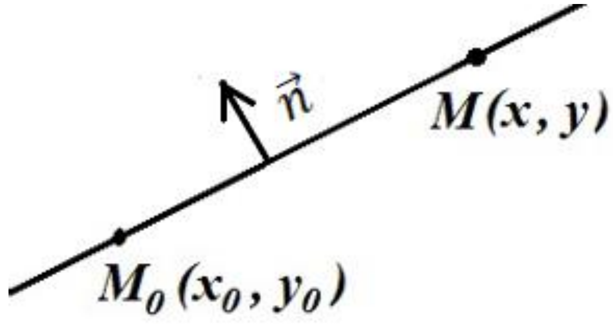
получим общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0\,.$$



Направляющий вектор прямой имеет координаты $\{m; n\}$, следовательно, из общего уравнения прямой можно найти координаты направляющего вектора и координаты вектора нормали:

$$\vec{s} = \{-B, A\},\ \ \vec{n} = \{A, B\}.$$



Рассмотрим скалярное произведение направляющего вектора прямой $\vec{s}$ и вектора нормали $\vec{n}$:

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = (-B) \cdot A + A \cdot B = 0 \Rightarrow$$

векторы $\vec{s}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны.

Так как $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = t \cdot \vec{s}$ $\Rightarrow$ получаем векторное уравнение прямой:

$$\boxed{(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \vec{n} = 0.}$$

Запишем это уравнение в координатной форме:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (9.8)}$$

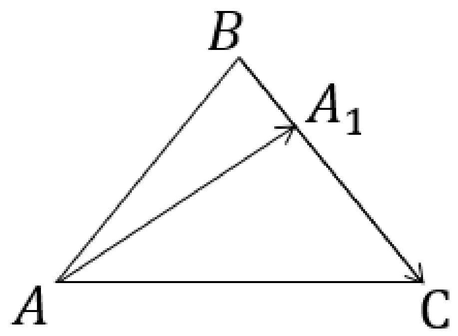
Уравнение (9.8) – уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B\}$.

Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то возможны случаи:

1) $A = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B} \Rightarrow$ прямая $\parallel OX$;
2) $B = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A} \Rightarrow$ прямая $\parallel OY$;
3) $C = 0 \Rightarrow Ax + By = 0 \Rightarrow$ прямая, проходящая через точку $O(0,0)$;
4) $A = C = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ прямая совпадает с осью OX;
5) $B = C = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ совпадает с осью OY.

Пример 9.5. Дан треугольник ABC с вершинами $A(3; 4)$, $B(-2; 2)$, $C(5; 3)$. Написать уравнение высоты AA_1.

Решение. Так как $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC}$, то $\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ – вектор нормали к прямой AA_1:



$$\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (5 - (-2); 3 - 2) = (7; 1)$$

Подставляя координаты вектора нормали в общее уравнение прямой, получим:

$$7x + y + C = 0.$$

Остается найти константу С, для чего подставим в данное уравнение координаты точки $A(3; 4)$:

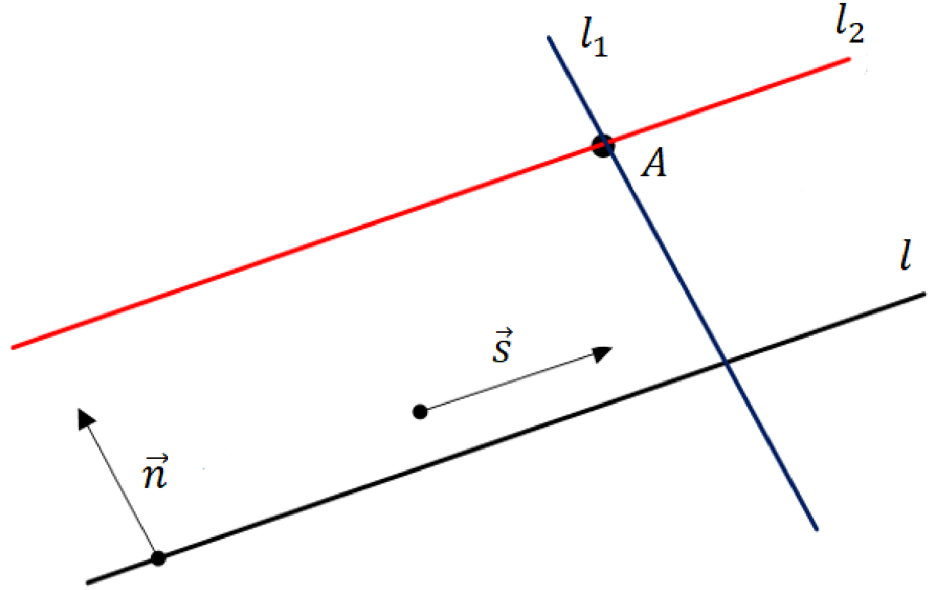
$$7 \cdot 3 + 4 + C = 0 \Rightarrow C = -25 \Rightarrow$$

уравнение высоты AA_1 имеет вид: $7x + y - 25 = 0$.

Пример 9.6. Даны прямая l: $\frac{x-4}{-5} = \frac{y+3}{1}$ и точка $A(-3; 2)$. Написать:

1) общее уравнение прямой l_1, проходящей через точку A, перпендикулярно прямой l.

2) уравнение прямой l_2, проходящей через точку A, параллельно прямой l.



Решение. 1) Прямая $l_1 \perp l$, тогда направляющий вектор прямой l: $\vec{s} = \{-5; 1\}$ является вектором нормали $\vec{n}$ для прямой l_1.

Тогда можно записать общее уравнение прямой l_1, используя формулу:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

где $\{A; B\}$ – координаты вектора нормали прямой l_1, $(x_0; y_0)$ – координаты точки, через которую проходит эта прямая.

$$-5(x + 3) + 1(y - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$-5x + y - 17 = 0 \text{ – общее уравнение прямой } l_1.$$

2) Прямая l_2 проходит через точку $A(-3; 2)$ и $l_2 \,||\, l$, тогда направляющий вектор прямой l: $\vec{s} = \{-5; 1\}$ является направляющим вектором прямой l_2. Следовательно, можно записать каноническое уравнение прямой l_2, используя формулу: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$.

$\frac{x+3}{-5} = \frac{y-2}{1}$ – каноническое уравнение прямой l_2.

Общее уравнение прямой l_2:

$$\frac{x+3}{-5} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow x + 3 = -5(y-2) \Rightarrow$$

$x + 5y - 7 = 0$ – общее уравнение прямой l_2.

9.7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0\,.$$

Пусть $B \neq 0$, тогда выразим переменную y:

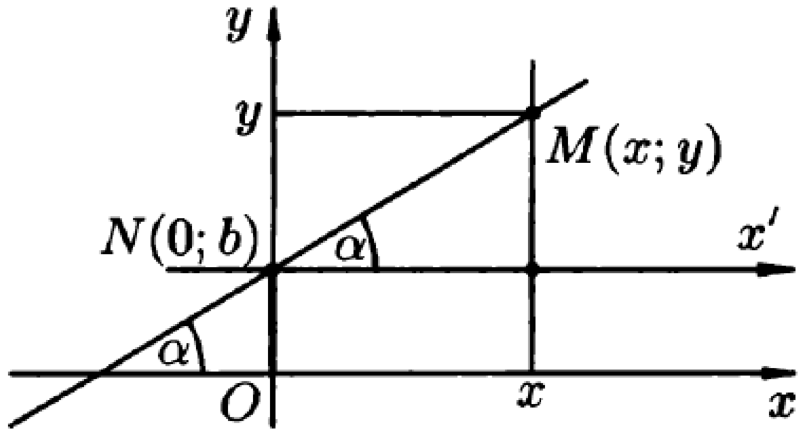
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}\,.$$

Обозначим $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, тогда получаем *приведенное уравнение прямой* или *уравнение прямой с угловым коэффициентом*:

$$\boxed{y = kx + b\,. \qquad (9.9)}$$

Пусть для простоты $k > 0$, $b > 0$, тогда из уравнения $y = kx + b$ имеем:

$$\frac{x}{-b/k} + \frac{y}{b} = 1.$$



Рассмотрим угол α, образованный прямой и положительным направлением оси абсцисс.

$$tg\alpha = \frac{b}{b/_k} = k.$$

Таким образом, k есть тангенс угла наклона прямой к оси Ox, или ***угловой коэффициент*** прямой.

Замечание 9.3. Если прямая перпендикулярна оси Ox, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $k = tg\frac{\pi}{2}$ не существует, т.е. вертикальная прямая не имеет углового коэффициента.

Если вертикальная прямая отсекает на оси $0x$ отрезок равный a, то ее уравнение имеет вид:

$$\boxed{x = a.}$$

Таким образом, прямую на плоскости можно задать точкой $M_0(x_0, y_0)$, через которую проходит прямая и угловым коэффициентом k этой прямой.

В уравнение $y = kx + b$ подставим координаты точки M_0:

$$y_0 = kx_0 + b \Rightarrow b = y_0 - kx_0 \Rightarrow$$

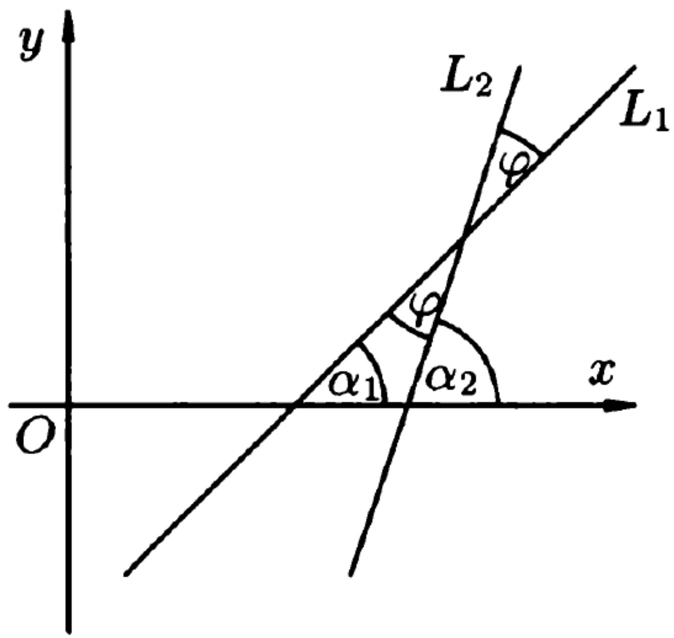
$$y = kx + y_0 - kx_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (9.10)}$$

Уравнение (9.10) – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k.

9.8. Угол между прямыми. Точка пересечения прямых

Пусть заданы две прямые: $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.



Обозначим через φ угол между ними. Из рисунка видно, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, $tg\,\alpha_1 = k_1$, $tg\,\alpha_2 = k_2$.

Воспользуемся формулой:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\beta} \Rightarrow$$

$$tg\,\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_2\,tg\,\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Таким образом, острый угол между двумя прямыми на плоскости находится по формуле:

$$tg\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (9.11)$$

В частности, если угол составляет 90^0, то $tg\,90^0 = \infty$. Это возможно, если:

$$1 + k_1 k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Получаем критерий перпендикулярности прямых:

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \qquad (9.12)$$

Критерием параллельности двух невертикальных прямых на плоскости является равенство их угловых коэффициентов:

$$k_1 = k_2. \qquad (9.13)$$

$\blacktriangleright\ \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow tg\alpha_1 = tg\alpha_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.\ \blacktriangleleft$

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $x+2y-6=0$ относительно точки A(4; 2).
2. Две смежные вершины квадрата имеют координаты $(1;4)$ и $(4;5)$. Найти координаты двух других вершин.
3. Даны координаты середин сторон треугольника: $A(1;2), B(7;4), C(3;\ -4)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.
4. Даны уравнения $4x-3y-17=0$ и $4x-3y+3=0$ двух сторон квадрата и одна из его вершин $A(2;\ -3)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат две другие стороны квадрата.

Спасибо за внимание!