ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Горшунова Т.А.

Лекция № 8

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

- Координатное выражение векторного произведения
- Смешанное произведение векторов, его свойства и координатное выражение
- Векторное уравнение прямой

24 октября 2023 г.

8.1. Координатное выражение векторного произведения

Для получения выражения векторного произведения двух векторов через их координаты, используют все парные векторные произведения единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$:

$$[\vec{i},\vec{i}] = [\vec{j},\vec{j}] = [\vec{k},\vec{k}] = \vec{0},$$

$$[\vec{i},\vec{j}] = \vec{k},\ [\vec{j},\vec{k}] = \vec{i},\ [\vec{k},\vec{i}] = \vec{j},$$

$$[\vec{j},\vec{i}] = -\vec{k},\ [\vec{k},\vec{j}] = -\vec{i},\ [\vec{i},\vec{k}] = -\vec{j}.$$

$\times$	$\vec{\boldsymbol{i}}$	$\vec{\boldsymbol{j}}$	$\vec{\boldsymbol{k}}$
$\vec{\boldsymbol{i}}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{\boldsymbol{j}}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{\boldsymbol{k}}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Найдем векторное произведение векторов $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ через их координаты:

$$[\vec{a},\vec{b}] = [a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}] =$$

$$= a_xb_x[\vec{i},\vec{i}] + a_xb_y[\vec{i},\vec{j}] + a_xb_z[\vec{i},\vec{k}] + a_yb_x[\vec{j},\vec{i}] + a_yb_y[\vec{j},\vec{j}] +$$

$$+a_yb_z[\vec{j},\vec{k}] + a_zb_x[\vec{k},\vec{i}] + a_zb_y[\vec{k},\vec{j}] + a_zb_z[\vec{k},\vec{k}] =$$

$$= a_xb_y\vec{k} - a_xb_z\vec{j} - a_yb_x\vec{k} + a_yb_z\vec{i} + a_zb_x\vec{j} - a_zb_y\vec{i} =$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.}$$

Пример 8.1. Найти векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ для векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Решение.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-9 - 1) - \vec{j}(6 + 1) + \vec{k}(2 - 3) = -10\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k} = (-10; -7; -1).$$

Пример 8.2. Вычислить площадь треугольника ABC, если $A(1; 1; 1)$, $B(1; 2; 3)$, $C(-1; 2; 1)$.

Решение. Используем геометрический смысл векторного произведения:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

$$\overrightarrow{AB} = (1-1; 2-1; 3-1) = (0; 1; 2), \overrightarrow{AC} = (-1-1; 2-1; 1-1) = (-2; 1; 0)$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+4) + \vec{k}(0+2) = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Тогда $\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{4+16+4} = 2\sqrt{6} \Rightarrow$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}.$$

Пример 8.3. Упростить выражение:

$$\vec{j} \times \vec{i} + 3\vec{j} \times \vec{k} - 5\vec{k} \times \vec{i} + (3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}) \times (\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}).$$

Решение.

$$\vec{j} \times \vec{i} + 3\vec{j} \times \vec{k} - 5\vec{k} \times \vec{i} + \left(3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}\right) \times \left(\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}\right) =$$

$$= -\vec{k} + 3\vec{i} - 5\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{k} + 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{i}(25 - 6) - \vec{j}(15 + 1) + \vec{k}(-18 - 5) =$$

$$= -\vec{k} + 3\vec{i} - 5\vec{j} + 19\vec{i} - 16\vec{j} - 23\vec{k} =$$

$$= -\vec{k} + 3\vec{i} - 5\vec{j} + 19\vec{i} - 16\vec{j} - 23\vec{k} = 22\vec{i} - 21\vec{j} - 24\vec{k}.$$

Пример 8.4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, $\varphi = \pi/6$ (φ – угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$).

Решение.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{p} + 3\vec{q}, 2\vec{p} - \vec{q}] = [\vec{p}, 2\vec{p}] + [\vec{p}, -\vec{q}] + [3\vec{q}, 2\vec{p}] + [3\vec{q}, -\vec{q}] =$$

$$= 2\underbrace{[\vec{p}, \vec{p}]}_{0} - [\vec{p}, \vec{q}] + 3 \cdot 2 \cdot [\vec{q}, \vec{p}] - 3\underbrace{[\vec{q}, \vec{q}]}_{0} = -[\vec{p}, \vec{q}] - 6[\vec{p}, \vec{q}] = -7[\vec{p}, \vec{q}] \Rightarrow$$

$$S = \left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = |-7[\vec{p}, \vec{q}]| = |-7| \cdot |[\vec{p}, \vec{q}]| = 7 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot sin(\pi/6) =$$

$$= 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 7 \Rightarrow S = 7.$$

8.2. Смешанное произведение векторов

Определение 8.1. ***Смешанным произведением*** трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется **число**, равное скалярному произведению векторного произведения первых двух векторов на третий вектор: $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$.

Найдем выражение для смешанного произведения трех векторов $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ и $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ через их координаты:

$$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k}, c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.}$$

Таким образом, смешанное произведение равно определителю третьего порядка, в строках которого стоят координаты перемножаемых векторов.

Пользуясь свойствами определителя, можно показать, что:

$$\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)=\left(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\right),$$

т.е. знаки скалярного и векторного произведения в смешанном произведении можно переставлять. Поэтому смешанное произведение принято обозначать $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения:

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$

Чтобы запомнить эти равенства заметим, что при «циклической перестановке» векторов (вектор передвигается на следующее место, а последний – на первое) знак не меняется, а при перестановке двух соседних векторов знак меняется.

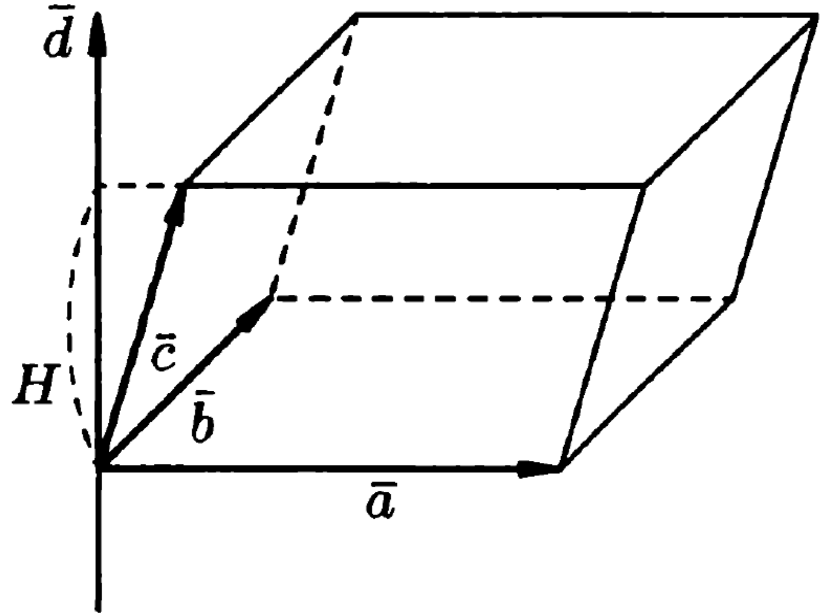
2) Геометрический смысл смешанного произведения:

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах.

$$V_{\text{параллелепипеда}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

►Построим вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, длина которого в соответствии с геометрическим смыслом векторного произведения, равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. площади основания параллелепипеда:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = S.$$



Из определения смешанного произведения:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{d}$ и $\vec{c}$.

На рисунке рассмотрен случай, когда угол $\varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

высота параллелепипеда $H = |\vec{c}| \cdot \cos\varphi \Rightarrow$

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi = S \cdot H = V$– объем параллелепипеда, изображенного на рисунке.

В случае $\varphi > \frac{\pi}{2} \Rightarrow H = -|\vec{c}| \cdot \cos\varphi$ (т.к. $\cos\varphi < 0$) и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -V$. Окончательно получаем: $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. ◄

3) Теорема 8.1 *(критерий компланарности векторов).* Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю:

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.}$$

►Если три вектора компланарны, можно считать, что они лежат в одной плоскости и тогда объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен нулю, т.е. смешанное произведение равно нулю. Если наоборот, смешанное произведение равно нулю, то объем параллелепипеда равен нулю и, значит, все векторы параллельны одной плоскости (компланарны) или хотя бы один из них равен нулю, что тоже означает компланарность всех трех векторов. ◄

Таким образом, необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю определителя, составленного из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 8.5. Выяснить компланарны ли векторы $\vec{a} = (1;3;0)$, $\vec{b} = (-1;0;-1)$ и $\vec{c} = (1;2;1)$?

Решение. Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 0 - 0 - (-3) - (-2) = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарные.

Пример 8.6. В пирамиде $ABCD$ с вершинами $A(10;7;1)$, $B(7;10;0)$, $C(1;10;7)$, $D(7;1;17)$ найти:

a) угол между ребрами AB и AD;
b) площадь основания ABC;
c) объем пирамиды;
d) высоту пирамиды h_D, опущенной из вершины D.

Решение.

a) Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ в координатах:

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 10; 10 - 7; 0 - 1) = (-3;3;-1),$$

$$\overrightarrow{AD} = (\,7-10; 1-7; 17-1) = (-3; -6; 16).$$

Чтобы найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ в координатах:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = (-3)\cdot(-3) + 3\cdot(-6) + (-1)\cdot 16 = -25,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{19},$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 16^2} = \sqrt{301}.$$

Подставляем в формулу скалярного произведения:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot \cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad -25 = \sqrt{19}\sqrt{301}\cos\varphi,$$

откуда $\cos\varphi = -\dfrac{25}{\sqrt{19}\sqrt{301}} \approx -0.330,\ \varphi \approx 1.907.$

b) Площадь основания ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. По свойству векторного произведения:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-10; 10-7; 7-1) = (-9; 3; 6) \Rightarrow$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \big(18-(-3)\big)\vec{i} - (-18-9)\vec{j} + (-9-(-27)\vec{k} = 21\vec{i} + 27\vec{j} + 18\vec{k} =$$

$$= (21; 27; 18).$$

$$\big|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\big| = \sqrt{21^2 + 27^2 + 18^2} = \sqrt{1494} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{1494}.$$

c) Объем пирамиды равен одной шестой от объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Объем параллелепипеда можно вычислить как модуль смешанного произведения $\left([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}], \overrightarrow{AD}\right)$:

$$\left([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}], \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(48+36) - 3(-144+18) - (54+9) = 63.$$

Следовательно, $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 63 = \frac{21}{2}$.

d) Высоту h_D можно найти, используя формулу объема пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h_D \Rightarrow h_D = \frac{3V}{S_{ABC}} \Rightarrow$$

$$h_D = \frac{3 \cdot \frac{21}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{1494}} = \frac{63}{\sqrt{1494}}.$$

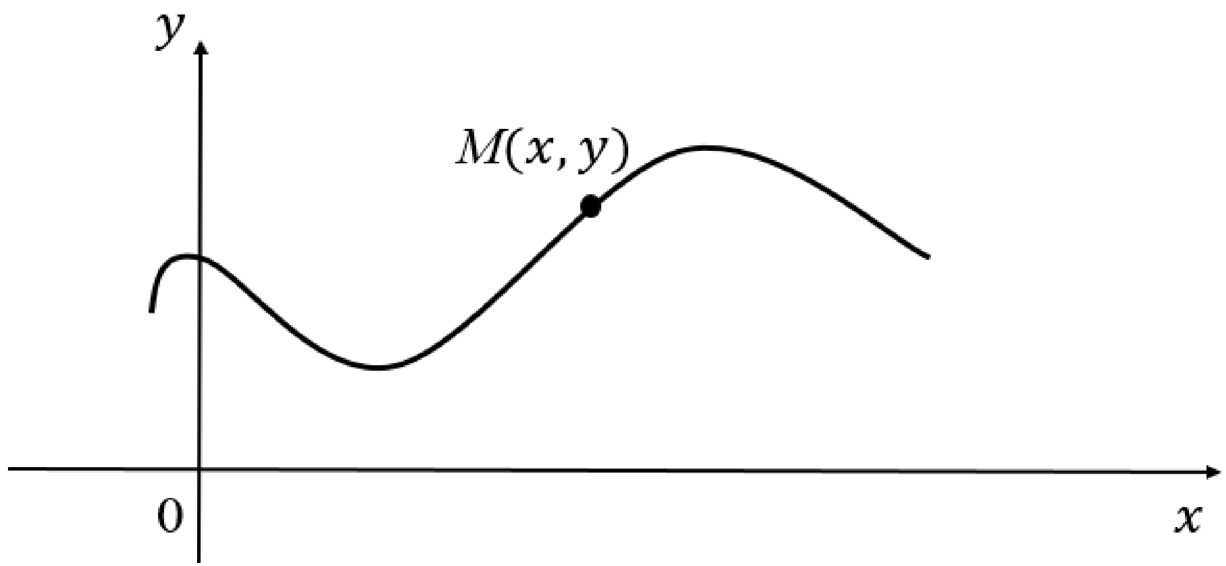
8.3. Аналитическая геометрия на плоскости

Определение 8.2. Уравнением линии (кривой) на плоскости Oxy называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Уравнение линии записывается в виде:

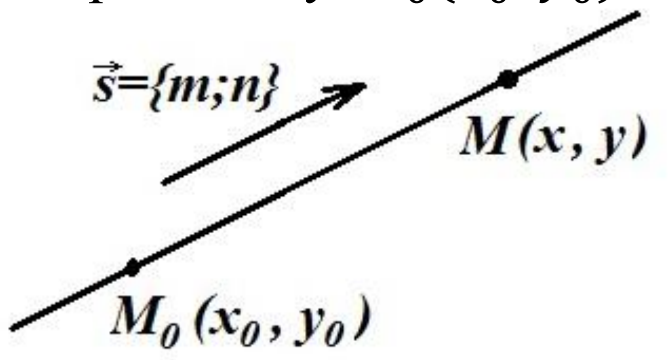
$$F(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad y = f(x).$$

Если точка $M(x; y)$ передвигается по линии, то ее координаты, изменяясь, удовлетворяют уравнению этой линии. Координаты $M(x; y)$ называются текущими координатами.



8.4. Векторное уравнение прямой

Рассмотрим на плоскости прямую l, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\vec{s} = (m; n)$, коллинеарный данной прямой (такой вектор называется направляющим вектором прямой l).



Произвольная точка $M(x; y)$ будет лежать на прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ будут коллинеарны.

Если векторы коллинеарны, то существует некоторое число $t \in \mathbb{R}$, такое, что выполняется равенство:

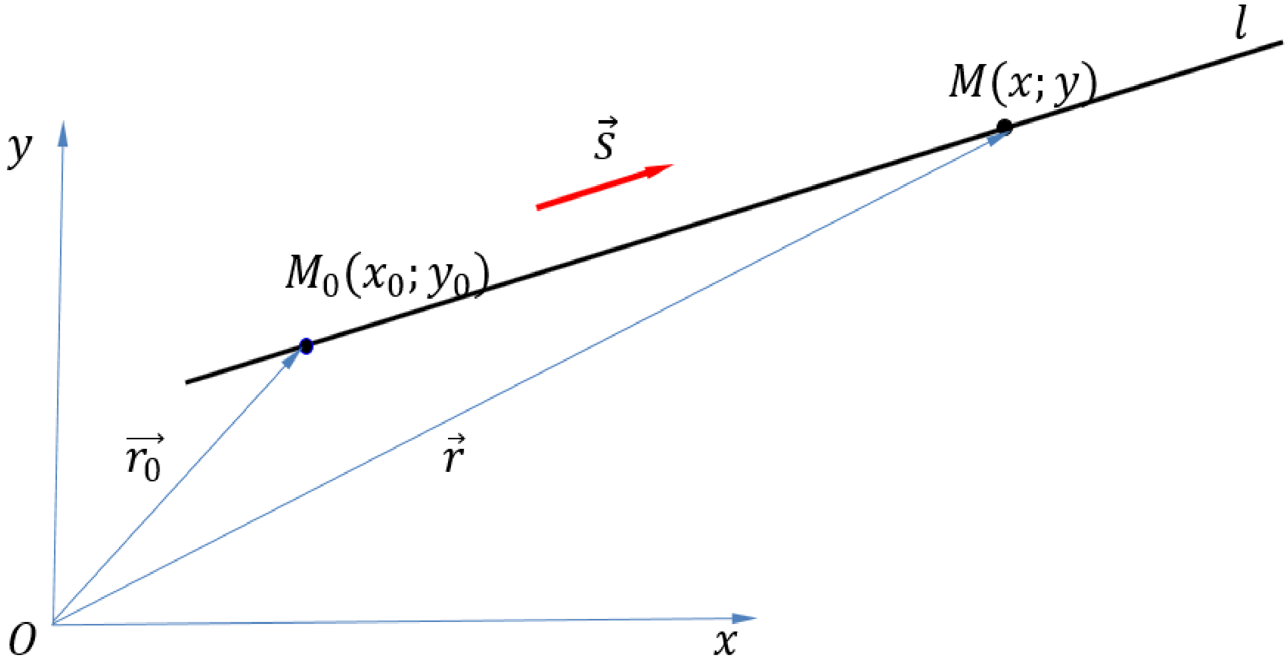
$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}, \tag{8.1}$$

где $t \in (-\infty; +\infty)$ – параметр.

Каждому значению t соответствует определенная точка на прямой l.

Уравнение (8.1) называется *векторным уравнением* прямой l.

Рассмотрим $\overrightarrow{r_0}$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0; y_0)$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $M(x; y)$.



$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t \cdot \vec{s} \ \Rightarrow$$

$$\vec{r} = t\vec{s} + \overrightarrow{r_0} \tag{8.2}$$

Уравнение (8.2) называется *векторно-параметрическим уравнением* прямой l.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В ромбе $ABCD$ диагонали $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Разложить по этим двум векторам векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.

2. Зная одну из вершин треугольника $A(1; -6; 3)$ и векторы, совпадающие с двумя сторонами $\overrightarrow{AB} = 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, найти остальные вершины и вектор $\overrightarrow{CA}$.

3. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5; 3; 4)$, $B(-1; -7; 5)$, $C(6; -5; -3)$ и $D(2; 5; -4)$ есть квадрат.

4. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$. Доказать, что эти векторы компланарны.

5. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

6. Найти $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) - (\vec{e} \times \vec{f}) \times \vec{q}$, если $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = (-2; 3; 1)$, $\vec{c} = (2; -2; 2)$, $\vec{e} = (-1; 3; 5)$, $\vec{f} = (1; 0; -2)$ и $\vec{q} = (3; -2; 2)$.

7. Даны единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Зная, что $(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = (\widehat{\vec{e}_3, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2}) = \alpha$, доказать равенство $\left(\overrightarrow{\vec{e}_1} \times \overrightarrow{\vec{e}_2}\right) \cdot \vec{e}_3 = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

8. Зная, что $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$ найти соотношение между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, не содержащее коэффициенты λ_1 и λ_2.

Указание. Исключить λ_1 можно умножением равенства векторно на $\vec{a}$.

9. Доказать (геометрически), что при любых векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны. Каков геометрический смысл этого факта?

Спасибо за внимание!