ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

РТУ МИРЭА
Кафедра ВМ-3

Горшунова Т.А.

Лекция № 7

СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

- Деление отрезка в данном отношении.
- Направляющие косинусы вектора.
- Условие коллинеарности двух векторов.
- Скалярное произведение векторов, свойства, координатное выражение.
- Векторное произведение векторов, его свойства и координатное выражение.
- Смешанное произведение векторов, его свойства и координатное выражение.

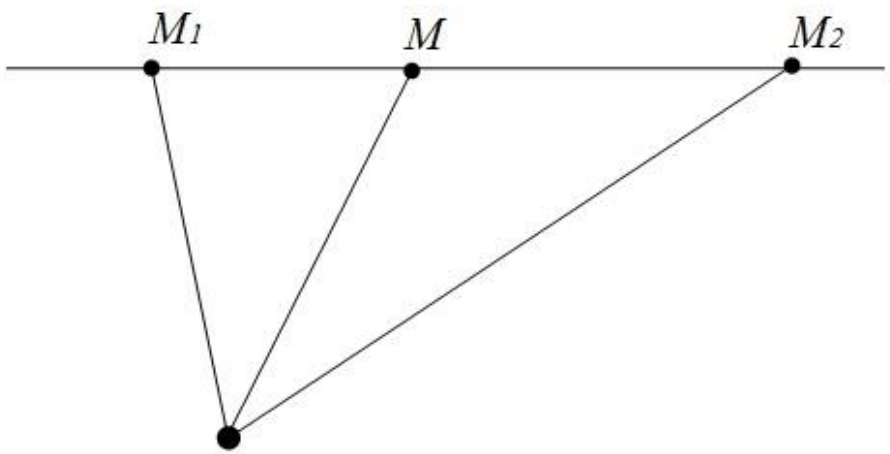
17 октября 2023 г.

7.1. Деление отрезка в данном отношении

Пусть отрезок M_1M_2 определен своими концами $M_1(x_1; y_1, z_1)$, $M_2(x_2; y_2, z_2)$ и задано положительное число λ.

Задача. Найти точку $M \in M_1M_2$, такую что:

$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ или $M_1M : MM_2 = \lambda.$



Пусть x, y, z – искомые координаты точки M.

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M}\right|}{\left|\overrightarrow{MM_2}\right|} \Rightarrow \frac{\left|\overrightarrow{M_1M}\right|}{\left|\overrightarrow{MM_2}\right|} = \lambda \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\,\overrightarrow{MM_2} \Rightarrow$$

$$(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k} = \lambda\big((x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j} + (z_2 - z)\vec{k}\big).$$

Из равенства векторов следует равенство их координат:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

откуда находим x, y, z:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Пример 7.1. Дан треугольник ABC с вершинами $A(2; 1; -3)$, $B(3; 3; 4)$, $C(-5; 1; 7)$. Найти длину медианы AA_1 треугольника.

Решение. Координаты середины отрезка BC находим по формуле деления отрезка с $\lambda = 1$:

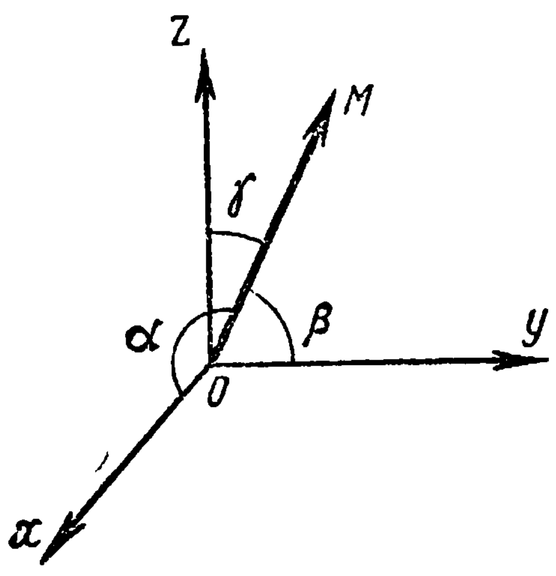
$$A_1\left(\frac{3-5}{2}; \frac{3+1}{2}; \frac{4+7}{2}\right) \Rightarrow A_1\left(-1; 2; \frac{11}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \left(-1-2;\ \ 2-1;\ \ \frac{11}{2} - (-3)\right) = \left(-3; 1; \frac{17}{2}\right) \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{AA_1}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{329}{4}}.$$

7.2. Направляющие косинусы вектора

Вектор характеризуется длиной и направлением. Направление вектора в пространстве можно задать углами α, β, γ, которые составляет вектор с осями координат.



Косинусы этих углов – $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами вектора.***

Пусть дан вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \Rightarrow$

$$a_x = Пр_{Ox}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha,\ a_y = Пр_{Oy}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta,$$

$$a_z = Пр_{Oz}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

или

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

Возводя каждое из этих выражений в квадрат и складывая, получим:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Таким образом, среди трех углов α, β, γ независимыми являются только два, а третий определяется из данного соотношения.

Замечание 7.1. Координаты любого единичного вектора $\vec{e}_a$ равны его направляющим косинусам, так как $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, и значит его разложение по осям имеет вид:

$$\vec{e}_a = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},$$

7.3. Условие коллинеарности векторов

Пусть векторы $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ коллинеарны. Тогда $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ или $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, что означает для координат выполнение следующих соотношений:

$$b_x = \lambda a_x, b_y = \lambda a_y, b_z = \lambda a_z \quad \text{или} \quad a_x = \lambda b_x,\ a_y = \lambda b_y,\ a_z = \lambda b_z.$$

Выразив λ из этих равенств и приравняв, получим:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} \quad \text{или} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}\ .$$

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 7.1 *(критерий коллинеарности векторов).* Для того, чтобы два вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны:

$$\vec{a} \| \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Пример 7.2. Найти значение параметра λ, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут коллинеарны, если $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + \lambda\vec{k}$.

Решение. $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = (1; 3; -1)$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + \lambda\vec{k} = (2; 6; \lambda)$.

Составим отношение соответствующих координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = -2.$$

7.4. Скалярное произведение

Определение 7.1. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ***<u>число</u> (скаляр)***, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi .$$

$$Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b} \Rightarrow$$

$$Пр_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|}.$$

Скалярное произведение обозначается $(\vec{a},\vec{b})$ или $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$ – коммутативность.

► $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\varphi = (\vec{b},\vec{a})$.◄

2) $\lambda(\vec{a},\vec{b}) = (\lambda\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\lambda\vec{b})$ – ассоциативность.

► Если $\lambda > 0$, то $\lambda(\vec{a},\vec{b}) = \lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = |\lambda\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = (\lambda\vec{a},\vec{b})$.◄

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

3) $(\vec{a},(\vec{b}+\vec{c})) = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c})$ – дистрибутивность.

► По определению

$$(\vec{a},(\vec{b}+\vec{c})) = |\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\cdot(Пр_{\vec{a}}\vec{b} + Пр_{\vec{a}}\vec{c}) =$$

$$= |\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b} + |\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{c} = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c}).$$ ◄

4) Теорема 7.2 ***(критерий перпендикулярности (ортогональности) векторов).*** Для того, чтобы два вектора были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0.$$

► Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\varphi = 90° \Rightarrow cos\,\varphi = 0$ и $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\,\varphi = 0$.
Наоборот, если $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$, то $|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\,\varphi = 0$, тогда один из сомножителей равен нулю.
Если $cos\,\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90°$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$ и его направление любое, например, $\perp \vec{b}$. Если $\left|\vec{b}\right| = 0$, то $\vec{b} = \vec{0}$ – аналогичный случай. ◄

5) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2\,.$$

► $\vec{a}^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot cos\,0 = |\vec{a}|^2$. ◄

Таблица скалярного произведения базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ имеет вид:

·	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Найдем выражение скалярного произведения векторов $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ через их координаты:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$= a_x b_x \vec{i}^2 + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j}^2 + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} +$$

$$+ a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k}^2 = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Таким образом,

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \,.}$$

Учитывая эту формулу и *свойство 4* скалярного произведения, получаем, что для перпендикулярности двух векторов необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \;\Leftrightarrow\; a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0.}$$

Из определения скалярного произведения получим формулу для нахождения косинуса угла между двумя векторами:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.}$$

Замечание 7.2. Знак $\cos\varphi$ зависит только от знака числителя дроби, т.е. перпендикулярность векторов, острый или тупой угол между векторами – все это определяется знаком скалярного произведения.

Если $(\vec{a},\vec{b}) > 0 \Rightarrow$ угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый, $(\vec{a},\vec{b}) < 0 \Rightarrow$ этот угол тупой, $(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

Пример 7.3. Дан треугольник ABC с вершинами $A(2;1;-3)$, $B(3;3;4)$, $C(-5;1;7)$. Найти величину угла BAC.

Решение: $\overrightarrow{AB} = (3-2; 3-1; 4-(-3)) = (1;2;7)$;

$\overrightarrow{AC} = (-5-2; 1-1; 7-(-3)) = (-7;0;10)$.

Запишем формулу скалярного произведения:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\Rightarrow cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

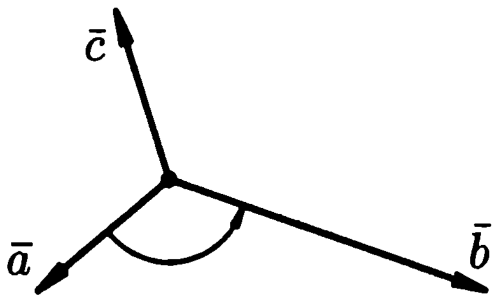
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot(-7)+2\cdot 0+7\cdot 10=63,$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+7^2}=\sqrt{54},\ |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-7)^2+0^2+10^2}=\sqrt{149}\,.$$

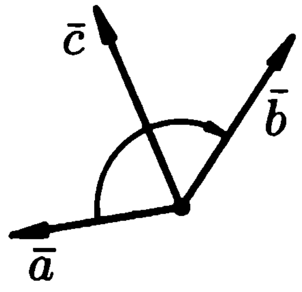
$$cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right)=\frac{63}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{149}}\Rightarrow\angle BAC=arccos\frac{63}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{149}}\,.$$

7.5. Векторное произведение

Определение 7.2. Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют ***правую (левую) тройку***, с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).



правая тройка,



левая тройка

Определение 7.3. ***Векторным произведением*** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой что:

1. вектор $\vec{c}$ перпендикулярен перемножаемым векторам:

$$\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b};$$

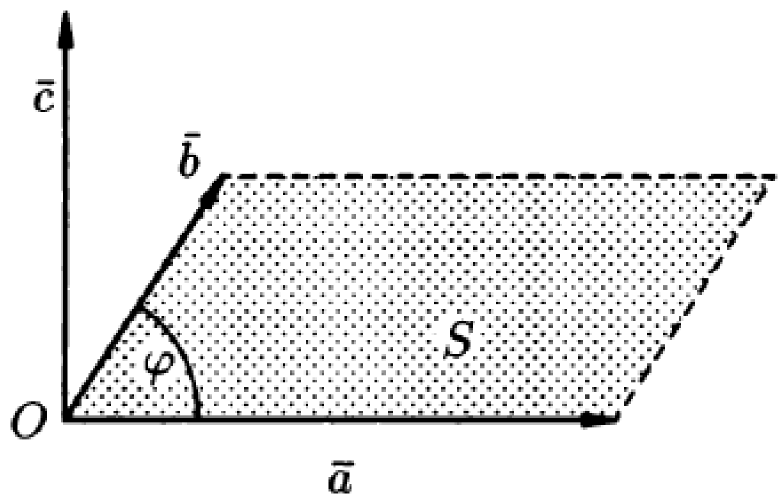
2. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку;

3. модуль вектора $\vec{c}$ определяется формулой:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторное произведение обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.



Свойства векторного произведения.

1) $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ – антикоммутативность.

► Из определения следует, что векторы $[\vec{a},\vec{b}]$ и $[\vec{b},\vec{a}]$ имеют одинаковую длину: $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \sin\varphi=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot \sin\varphi$ и противоположные направления. ◄

2) $\lambda[\vec{a},\vec{b}]=[\lambda\vec{a},\vec{b}]$ – ассоциативность.

► Пусть $\lambda>0$, вектор $\lambda[\vec{a},\vec{b}]$ имеет то же направление, что и вектор $[\vec{a},\vec{b}]$. Вектор $[\lambda\vec{a},\vec{b}]$ при $\lambda>0$ имеет то же направление. Длины этих векторов также совпадают:

$$\left|\lambda[\vec{a},\vec{b}]\right|=|\lambda|\cdot\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=\lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \sin\varphi,$$

$$\left|[\lambda\vec{a},\vec{b}]\right|=|\lambda\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \sin\varphi=\lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \sin\varphi.$$

Аналогично проводится доказательство для случая $\lambda<0$. ◄

3) $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]$ – дистрибутивность.

Без доказательства.

4) Теорема 7.3 *(критерий коллинеарности векторов).* Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нулю:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = 0.$$

► Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\varphi = 0° \Rightarrow sin\,\varphi = 0$ и $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$. Наоборот, если $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$, то $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\,\varphi = 0$, следовательно, один из сомножителей равен нулю.
Если $sin\,\varphi = 0$, то $\varphi = 0°$ или $\varphi = \pi$ и $\vec{a} \parallel \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$ и его направление любое и значит $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Если $|\vec{b}| = 0$, то $\vec{b} = \vec{0}$ – аналогичный случай◄

5) Векторный квадрат равен нулю:

$$[\vec{a}, \vec{a}] = 0.$$

Это свойство является следствием свойства 4.

6) Геометрический смысл векторного произведения:

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах:

$$S_{\text{параллелограмма}} = \left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|.$$

$$S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|.$$

Для получения выражения векторного произведения двух векторов через их координаты, используют все парные векторные произведения единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$:

$$[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = \left[\vec{k}, \vec{k}\right] = \vec{0},$$

$$[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k},\ \left[\vec{j}, \vec{k}\right] = \vec{i},\ \left[\vec{k}, \vec{i}\right] = \vec{j},$$

$$[\vec{j}, \vec{i}] = -\vec{k},\ \left[\vec{k}, \vec{j}\right] = -\vec{i},\ \left[\vec{i}, \vec{k}\right] = -\vec{j}.$$

$\times$	$\vec{\boldsymbol{i}}$	$\vec{\boldsymbol{j}}$	$\vec{\boldsymbol{k}}$
$\vec{\boldsymbol{i}}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{\boldsymbol{j}}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{\boldsymbol{k}}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Спасибо за внимание!