ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

РТУ МИРЭА
Кафедра ВМ-3
Горшунова Т.А.

Лекция № 6

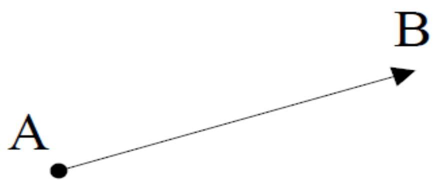
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ

- Вектор как направленный отрезок. Линейные операции над векторами и их свойства.
- Проекция вектора на ось. Свойства проекций.
- Линейная зависимость векторов. Канонический базис на плоскости и в пространстве. Декартовы координаты вектора.
- Деление вектора в заданном отношении.
- Направляющие косинусы вектора.
- Условие коллинеарности двух векторов.

10 октября 2023 г.

6.1. Вектор как направленный отрезок

Определение 6.1. ***Геометрическим вектором*** называется <u>*направленный*</u> отрезок AB с начальной точкой A и конечной точкой B, который можно перемещать параллельно самому себе.



Вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$, где точка A – начало, а точка B – конец вектора, или $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$

Определение 6.2. ***Длиной (или модулем)*** вектора $\overrightarrow{AB}$ называется число $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, равное длине отрезка AB, изображающего вектор.

Определение 6.3. ***Нуль-вектором*** называется вектор, у которого конец совпадает с началом, он обозначается: $\vec{0}$.

Длина нулевого вектора равна нулю: $\left|\vec{0}\right| = 0$. Направление нуль-вектора не определено. Можно считать, что нуль-вектор имеет любое желаемое в данный момент направление.

Определение 6.4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными*** $\vec{a} \| \vec{b}$, если они расположены на параллельных прямых или на одной прямой.

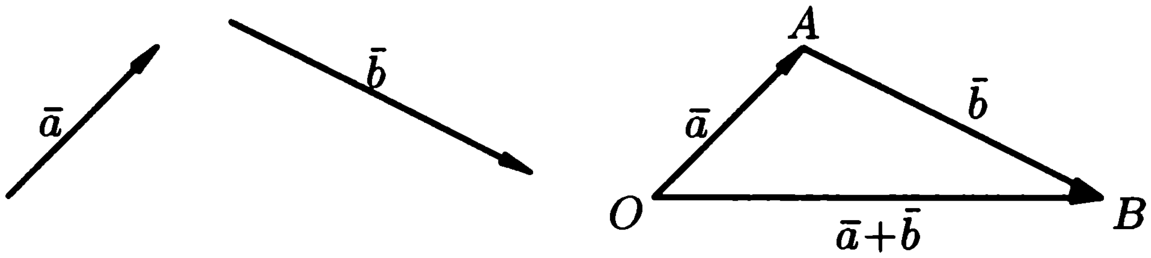
Линейные операции над векторами и их свойства

Линейными называются операции сложения и умножение вектора на число.

Определение 6.5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными***: $\vec{a}=\vec{b}$, если они коллинеарны, имеют равные модули и направлены в одну сторону.

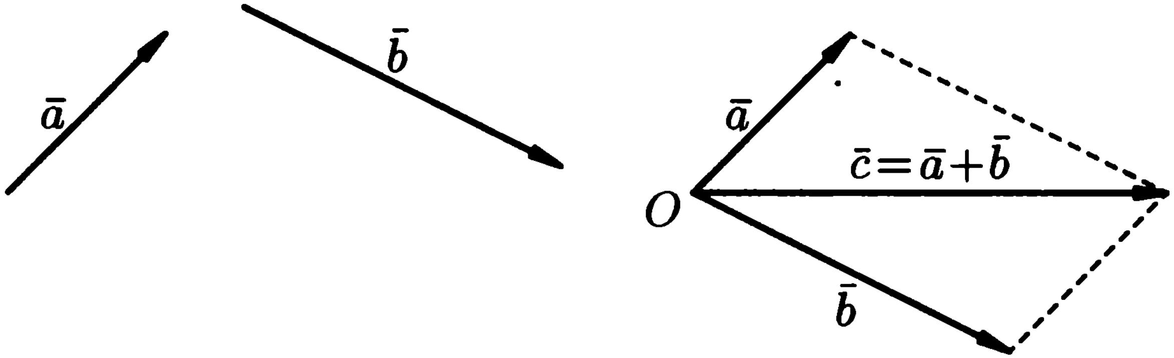
Определение 6.6. Суммой двух векторов $\vec{a}+\vec{b}$ называется вектор, полученный по правилу «треугольника»:

второй вектор $\vec{b}$ откладывается так, чтобы его начало совпало с концом первого вектора $\vec{a}$, тогда суммой будет являться «замыкающий» вектор $\vec{a}+\vec{b}$, начало которого совпадает с началом первого вектора $\vec{a}$, а конец – с концом второго вектора $\vec{b}$.



Сумму $\vec{a}+\vec{b}$ можно получить по правилу «параллелограмма»:

второй вектор $\vec{b}$ откладывается из начала первого вектора $\vec{a}$, на этих векторах строится параллелограмм и суммой $\vec{a}+\vec{b}$ в этом случае является диагональ этого параллелограмма.



Свойства суммы векторов:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – коммутативность,

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ – ассоциативность,

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Определение 6.7. ***Противоположным*** к вектору $\vec{a}$ называется вектор $-\vec{a}$, такой что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Определение 6.8. ***Разностью*** двух векторов $\vec{a}-\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, что $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$.

Определение 6.9. ***Произведением*** вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, такой что:

1) $\lambda\vec{a}||\vec{a}$, причем направление $\lambda\vec{a}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно ему, если $\lambda<0$;

2) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

Пример 6.1. Вектор $(-3\overrightarrow{a})$ это вектор, направление которого противоположно направлению $\vec{a}$, имеющий длину в три раза больше, чем $\vec{a}$.

Теорема 6.1. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, тогда и только тогда, когда $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ $(\vec{a} = \lambda\vec{b})$ (*доказать самостоятельно*).

Свойства умножения вектора на число:

1. $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ – коммутативность,
2. $\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ – ассоциативность,
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ – дистрибутивность,
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ – дистрибутивность относительно суммы скаляров.

Доказательства этих свойств вытекают непосредственно из определения операции.

Определение 6.10. ***Единичным*** называется вектор, длина которого равна единице.

Пусть дан вектор $\vec{a}$. Обозначим через $\vec{e}_a$ единичный вектор, одинаково направленный с вектором $\vec{a}$.

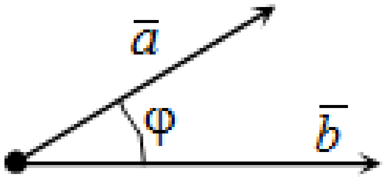
Вектор $\vec{e}_a$ называется ***ортом*** вектора $\vec{a}$.

Из определения умножения вектора на число следует, что:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_a \qquad \text{или} \qquad \vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

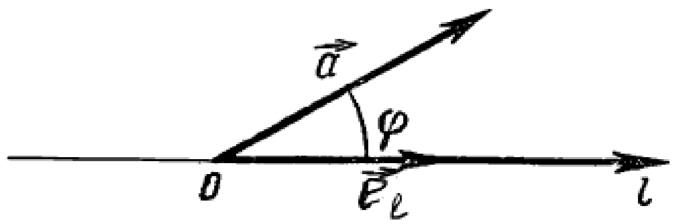
6.2. Проекция вектора на ось и ее свойства

Определение 6.11. ***Углом*** между двумя векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ***наименьший*** угол φ $(0 \le \varphi \le \pi)$, на который нужно повернуть один из них до совпадения с другим, если эти векторы отложены из одной точки.

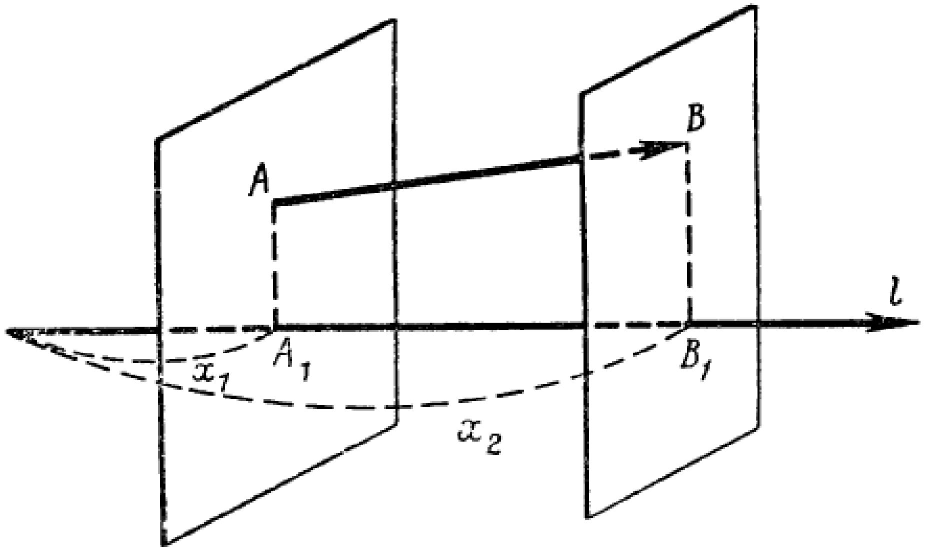


Рассмотрим некоторую ось l.

Определение 6.12. ***Углом*** между вектором $\vec{a}$ и осью l называется угол между вектором $\vec{a}$ и единичным вектором $\vec{e}_l$ оси l.



Определение 6.13. Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется число, равное разности координат проекций конца и начала вектора:

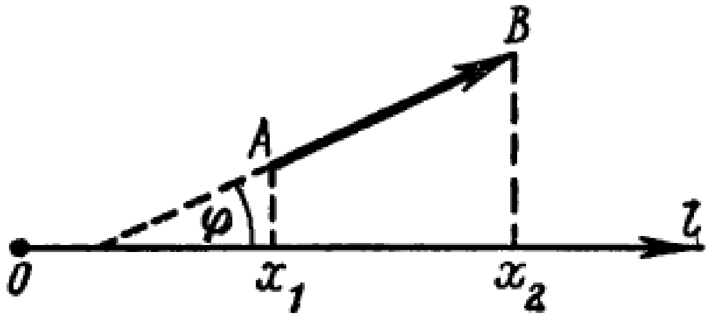


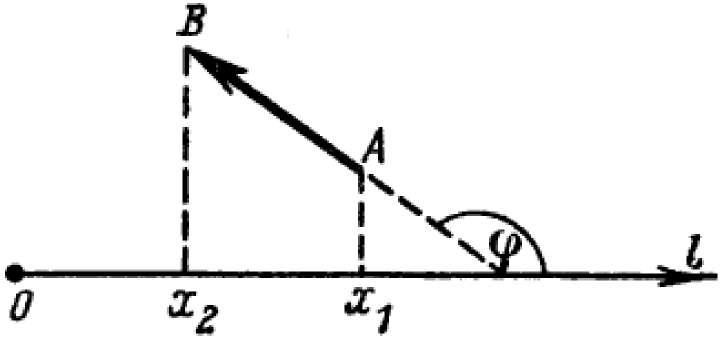
$$Пр_l\,\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1.$$

Замечание 6.1. Если угол φ между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l острый, то $x_2 > x_1$ и $Пр_l\,\overrightarrow{AB}$ положительна.

Если угол φ тупой, то $Пр_l\,\overrightarrow{AB}$ отрицательна.

Если $\overrightarrow{AB} \perp l$ $(\varphi = 90°)$, то $Пр_l\,\overrightarrow{AB} = 0$.

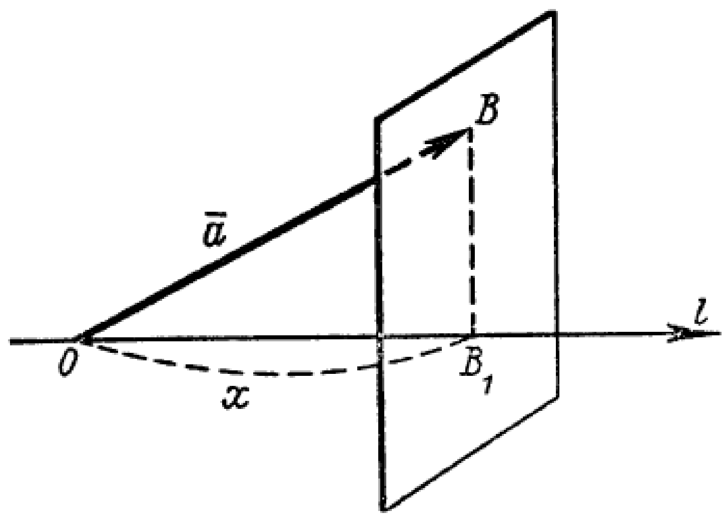




Свойства проекции:

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна модулю вектора $\vec{a}$, умноженному на косинус угла между вектором и осью:

$$Пр_l\,\overrightarrow{a} = |\vec{a}|\cos\varphi.$$



►Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l не изменится при любом его параллельном переносе, поэтому рассмотрим случай, когда вектор $\vec{a}$ отложен от точки O.

$$Пр_l\,\overrightarrow{a} = x - 0 = x.$$

Из прямоугольного треугольника OBB_1:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|\vec{a}|} \Rightarrow x = |\vec{a}|\cos\varphi \Rightarrow Пр_l\,\overrightarrow{a} = |\vec{a}|\cos\varphi.◄$$

2. Проекция суммы равна сумме проекций:

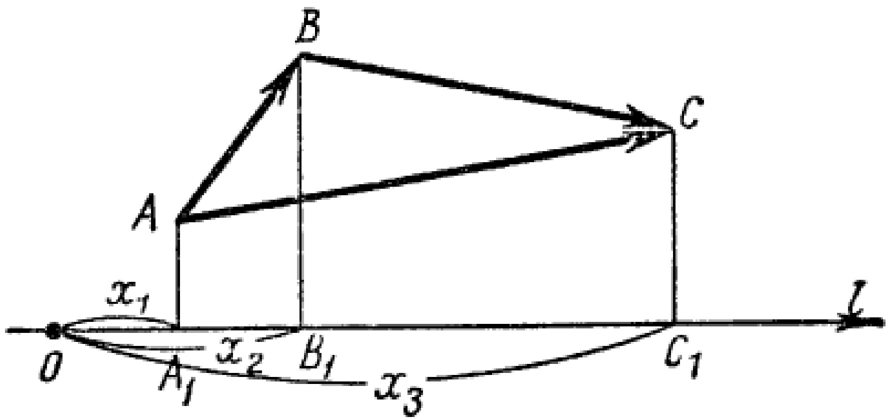
$$Пр_l(\vec{a}+\vec{b}) = Пр_l\vec{a} + Пр_l\vec{b}.$$

►Пусть $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow$

$$Пр_l\,\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1,$$

$$Пр_l\,\overrightarrow{BC} = x_3 - x_2,$$

$$Пр_l\,\overrightarrow{AC} = x_3 - x_1.$$



$$Пр_l\,\overrightarrow{AC} = x_3 - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = Пр_l\,\overrightarrow{AB} + Пр_l\,\overrightarrow{BC}. \blacktriangleleft$$

Это свойство верно для любого числа слагаемых.

3. Если вектор умножить на число, то проекция умножится на то же число, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак проекции:

$$Пр_l\lambda\,\vec{a} = \lambda Пр_l\vec{a}.$$

Если $\lambda > 0$ и вектор $\vec{a}$ составляет с осью l угол φ, то вектор $\lambda\vec{a}$ также составляет с осью l угол φ. Если же $\lambda < 0$, то вектор $\lambda\vec{a}$ составит с осью l угол $\pi - \varphi$.

1) Если $\lambda > 0$, то $Пр_l\lambda\,\vec{a} = |\lambda\vec{a}|\,cos\,\varphi = |\lambda||\vec{a}|\,cos\,\varphi = \lambda Пр_l\,\vec{a}$.

2) Если $\lambda < 0$, то $Пр_l\lambda\,\vec{a} = |\lambda\vec{a}|\,cos(\pi-\varphi) = |\lambda||\vec{a}|\,cos(\pi-\varphi) =$

$$= -\lambda|\vec{a}|(-\cos\varphi) = \lambda|\vec{a}|\cos\varphi = \lambda \Pi p_l\,\vec{a}.◄$$

Замечание 6.2. Проекция разности равна разности проекций.

6.3. Линейная зависимость векторов

Определение 6.14. Вектор $\vec{b}$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$, если $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m$, где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Определение 6.15. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно, что $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m = \vec{0}$.

Если же эта нулевая линейная комбинация имеет место только тогда, когда все $\lambda_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ называются ***линейно независимыми***.

Теорема 6.2. Если несколько векторов линейно зависимы, то хотя бы один из них всегда можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Справедливо и обратное: если один из векторов представим в виде линейной комбинации других векторов, то все эти векторы линейно зависимы.

Теорема 6.3. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны (*доказать самостоятельно*).

Теорема 6.4. Любые три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ на плоскости линейно зависимы.

Замечание 6.3. Если число векторов на плоскости больше трех, то они линейно зависимы, т.е. один из векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум.

Определение 6.16. Векторы называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной плоскости.

Теорема 6.5. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Теорема 6.6. Любые четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ в пространстве линейно зависимы.

Следствие.

1) Если число векторов в пространстве больше четырех, то они также линейно зависимы.

2) Для того чтобы три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.

Максимальное число линейно независимых векторов в пространстве равно трем.

6.4. Канонический базис на плоскости и в пространстве. Декартовы координаты вектора

Определение 6.17. ***Базисом*** на плоскости называется упорядоченная совокупность любых двух линейно независимых векторов.

Из теоремы 6.3 следует, что два любых неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости.

Если $\vec{d}$ – произвольный вектор на плоскости, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис, то вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде: $\vec{d} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b}$. Такое представление вектора $\vec{d}$ называется его *разложением по базису*, образованному векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Числа x_1 и x_2 называют *координатами вектора* $\vec{d} = (x_1; x_2)_{\{\vec{a},\vec{b}\}}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Теорема 6.7. Разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является единственным (*доказать самостоятельно*).

Определение 6.18. Базисом в пространстве называется упорядоченная совокупность любых трех линейно независимых векторов.

Любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве.

Любой вектор $\vec{d}$ однозначно разлагается по базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$$\vec{d} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}.$$

Числа x_1, x_2 и x_3 называют координатами вектора $\vec{d} = (x_1; x_2; x_3)_{\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

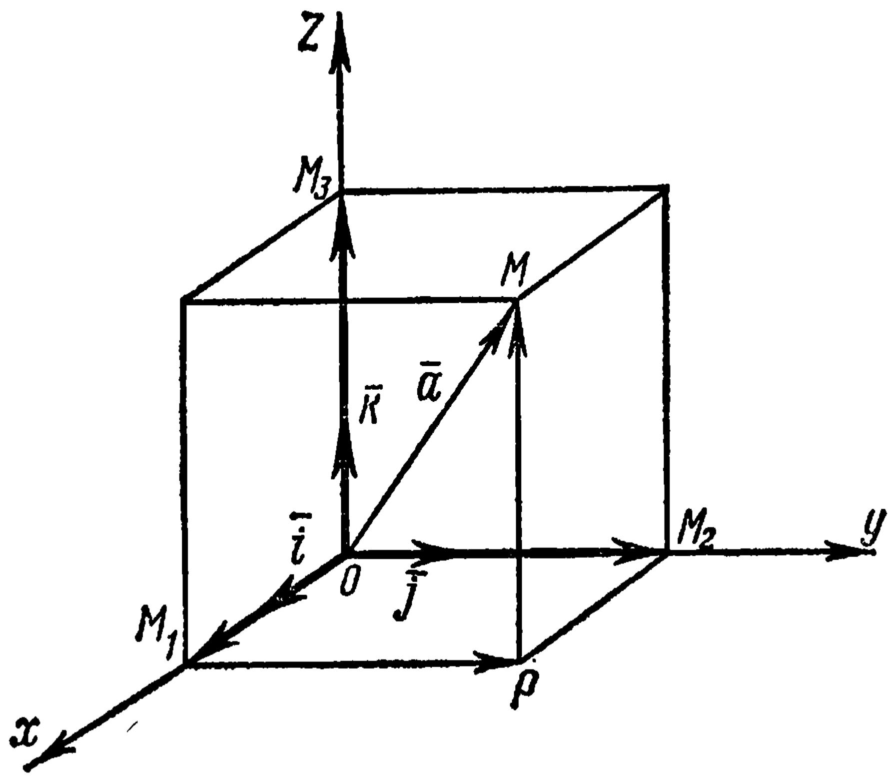
Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве *Oxyz*. На каждой из осей выберем единичный вектор с началом в точке *O* и концом в точке с координатой 1.

Обозначим $\vec{i}$ – единичный вектор по оси *Ox*, $\vec{j}$ – по оси *Oy*, $\vec{k}$ – по оси *Oz*.

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты координатных осей, образуют ***декартовый (канонический) базис*** в пространстве.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a}$ в пространстве, отложим его из начала координат O. Через конец этого вектора проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям. Получим прямоугольный параллелепипед, диагональю которого является вектор $\vec{a}$.



$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM_3} =$$
$$= (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}) + \overrightarrow{OM_3}.$$

$$\overrightarrow{OM_1} = Пр_{Ox}\vec{a} \cdot \vec{i}, \quad \overrightarrow{OM_2} = Пр_{Oy}\vec{a} \cdot \vec{j},$$
$$\overrightarrow{OM_3} = Пр_{Oz}\vec{a} \cdot \vec{k}.$$

Обозначив $Пр_{Ox}\vec{a} = a_x$, $Пр_{Oy}\vec{a} = a_y$, $Пр_{Oz}\vec{a} = a_z$, получаем разложение вектора $\vec{a}$ по каноническому базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\boxed{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.}$$

Числа a_x, a_y, a_z называются ***прямоугольными декартовыми координатами*** вектора $\vec{a}$: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Зная проекции вектора $\vec{a}$, можно легко найти выражение для модуля вектора. Так как вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ является диагональю параллелепипеда, то на основании известной теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда имеем:

$$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2,$$

$$\left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 = a_x^2,\ \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 = a_y^2,\ \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2 = a_z^2 \Rightarrow |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.}$$

Если известны координаты вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и вектора $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то линейные операции над векторами можно заменить соответствующими арифметическими действиями над их координатами:

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_x = b_x,\ \ a_y = b_y,\ \ a_z = b_z;$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}\ ;$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}.$$

Определение 6.19. Радиус-вектором $\vec{r}_M$ точки $M(a_1; a_2; a_3)$ называется вектор $\overrightarrow{OM}$ с началом в начале координат и концом в данной точке.

Координаты радиус-вектора совпадают с координатами точки М:

$$\vec{r}_M = \overrightarrow{OM} = (a_1; a_2; a_3).$$

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$, начало которого имеет координаты $A(x_1; y_1; z_1)$, а конец $B(x_2; y_2; z_2)$. Из определения проекции вектора на ось следует, что

$$Пр_{Ox}\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1, \quad Пр_{Oy}\overrightarrow{AB} = y_2 - y_1, \quad Пр_{Oz}\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1.$$

Поэтому координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны:

$$a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1,$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Замечание 6.4. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ определен координатами начала $A(x_1; y_1; z_1)$ и конца $B(x_2; y_2; z_2)$, то его длина равна:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Эта формула совпадает с формулой расстояния между двумя точками A и B.

Пример 6.2. Найти длину отрезка AB, где $A(-1;2;3)$, $B(2;-4;1)$.

Решение:

$$\overrightarrow{AB} = (2-(-1); -4-2; 1-3) = (3;-6;-2) \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Пример 6.3. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис в пространстве. Найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

$$\vec{a} = (3;2;-1), \vec{b} = (0;1;3), \vec{c} = (7;5;2), \vec{d} = (-5;0;5).$$

Решение. Покажем, что $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – базис, для этого проверим эти векторы на линейную независимость. Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\lambda_1(3;2;-1) + \lambda_2(0;1;3) + \lambda_3(7;5;2) = (0;0;0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 7\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 42 + 0 - (-7) - 0 - 45 = 10 \neq 0 \Rightarrow$$

данная однородная система имеет единственное тривиальное решение:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Следовательно, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – линейно независимы и образуют базис.

Найдем координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$$\vec{d} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} \;\Rightarrow\; x_1(3;2;-1) + x_2(0;1;3) + x_3(7;5;2) = (-5;0;5) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Решим эту систему по формулам Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 0 + 0 - 35 - 0 — 75 = 30 \;\Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{30}{10} = 3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 25 + 70 - 0 - (-20) - 75 = 40 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{40}{10} = 4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 0 - 30 - 5 - 0 - 0 = -20 \ \Rightarrow \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{10} = -2.$$

Нашли координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$$\vec{d} = (3; 4; -2)_{\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}} \Rightarrow \overrightarrow{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}.$$

Проверка:

$$3 \cdot (3; 2; -1) + 4 \cdot (0; 1; 3) - 2 \cdot (7; 5; 2) = (-5; 0; 5)$$ – *верно*.

Ответ: $\vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

Спасибо за внимание!