ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция № 4

РАНГ МАТРИЦЫ. РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- Ранг матрицы. Базисный минор
- Понятие линейной зависимости и линейной независимости
- Методы нахождения ранга матрицы
- Основные понятия теории систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): частное решение, общее решение; совместность и несовместность системы; однородные и неоднородные системы
- Метод Гаусса

26 сентября 2023 г.

4.1. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу, имеющую m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в этой матрице произвольные k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k.

Определение 4.1. ***Минором k-го порядка*** матрицы A называется определитель квадратной матрицы, получающейся из данной матрицы выделением произвольных k строк и k столбцов.

Сами элементы матрицы можно рассматривать как миноры первого порядка.

Некоторые из миноров матрицы могут быть равны нулю, другие – отличны от нуля.

Определение 4.2. ***Рангом*** матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора матрицы.

Ранг матрицы A обозначается символом $rank(A)$, или $rang(A)$, или $r(A)$.

Замечание 4.1. Если ранг матрицы A равен r, то это значит, что в матрице A имеется хотя бы один отличный от нуля минор порядка r, но всякий минор порядка, большего чем r, равен нулю.

Ранг нулевой матрицы равен нулю, ранг ненулевой матрицы ≥ 1.

Пример 4.1. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Единственный минор четвертого порядка равен нулю, так как все элементы одного из столбцов равны нулю. Один из миноров третьего порядка отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 7 = 13 \neq 0.$$

Следовательно, ранг данной матрицы равен 3: $r(A) = 3$.

Определение 4.3. ***Базисным минором*** называется любой из отличных от нуля миноров матрицы А, порядок которого равен рангу матрицы $r(A)$. Строки и столбцы матрицы A, которые образуют базисный минор, называются ***базисными***.

Замечание 4.2. Матрица может иметь несколько базисных миноров.

4.2. Понятие линейной зависимости и линейной независимости

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_k$ – n-мерные строки (столбцы), O – n-мерная нулевая строка (столбец). Выражение вида:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k, \text{ где } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

называется ***линейной комбинацией*** строк (столбцов) $P_1, P_2, \ldots, P_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Линейная комбинация, в которой все коэффициенты равны нулю:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

называется ***тривиальной***.

Линейная комбинация называется ***нетривиальной***, если хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ отличен от нуля ($\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 + \cdots + \lambda_k{}^2 \neq 0$).

Определение 4.4. Строки (столбцы) $P_1, P_2, \ldots, P_k$ называются ***линейно независимыми***, если их линейная комбинация равна нулевой строке (столбцу) только при нулевых коэффициентах:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k = O \;\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Строки (столбцы) называются ***линейно зависимыми***, если существует равная нулевой строке (столбцу) нетривиальная линейная комбинация этих строк (столбцов):

$$\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} :\ {\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + \dots + {\lambda_k}^2 \neq 0 \text{ и}$$

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k = O.$$

Теорема 4.1. Для того чтобы строки (столбцы) были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна (один) из них являлась (являлся) линейной комбинацией остальных.

Задача 4.1. Показать, что строки матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ линейно зависимы.

Теорема 4.2. Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы (т.е. ни одна из базисных строк не является линейной комбинацией остальных).

Теорема 4.3 ***(о базисном миноре).*** Каждая строка (столбец) произвольной матрицы является линейной комбинацией строк (столбцов), в которых расположен базисный минор.

Теорема 4.4 ***(о ранге матрицы).*** Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в этой матрице.

4.3. Нахождение ранга матрицы

Определение ранга матрицы, путем нахождения ненулевого минора наибольшего порядка, требует вычисления большого количества определителей. Чтобы сократить процесс вычислений используют метод окаймляющих миноров.

I. Метод окаймляющих миноров

1) Найти какой-нибудь минор $M_1 \neq 0$ первого порядка матрицы А (т. е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица А нулевая и $r(A) = 0$.

2) Вычислять миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (окаймляющие M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A) = 1$, если есть, то $r(A) \geq 2$ и т.д.

...

k) Вычислять (если они существуют) миноры k-го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то $r(A) = k - 1$; если есть хотя бы один такой минор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geq k$, и процесс продолжается.

Пример 4.2. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Матрица А имеет ненулевые элементы, следовательно, $r(A) \geq 1$. Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка (если он существует). Таким минором является, например, $M_2{}^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \Rightarrow r(A) \geq 2$.

Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2:

$$M_3{}^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0; \qquad M_3{}^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие $M_2{}^{(1)}$ равны нулю, тогда $r(A) = 2$.

Минор $M_2{}^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ является базисным. Базисными будут также миноры $M_2{}^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ и $M_2{}^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Замечание 4.3. На практике более удобным является нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

Теорема 4.5. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется (ранги эквивалентных матриц равны): $A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B)$.

Теорема 4.6. С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

Теорема 4.7. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

II. Метод элементарных преобразований

1) Привести матрицу А к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

2) Число ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы равно рангу матрицы А.

Пример 4.3. Вычислить ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведём матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\cdot(-1)+\mathrm{III}\cdot 2}{\overset{\mathrm{I}\cdot(-1)+\mathrm{II}\cdot 2}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}\cdot 3+\mathrm{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит ее ранг равен 2. Следовательно, ранг исходной матрицы также равен 2. Базисный минор: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

4.4. Теория систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.1}$$

где a_{ij} – коэффициенты при переменных, b_i – свободные члены уравнения. Индекс i – номер уравнения, а j – номер неизвестного.

Определение 4.5. ***Решением*** системы (4.1) называется такой набор чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ каждое из уравнений системы обращается в верное равенство.

Определение 4.6. Система линейных алгебраических уравнений называется ***совместной***, если она имеет решение, и ***несовместной***, если она не имеет решений.

Определение 4.7. Совместная система линейных уравнений называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Определение 4.8. Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называются ***эквивалентными***, если множества всех решений этих систем совпадают.

Определение 4.9. Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система (4.1) называется ***однородной***, в противном случае она называется ***неоднородной***.

Замечание 4.4. Однородная система всегда имеет решение нулевое (тривиальное) решение: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Запишем систему (4.1) в матричной форме: $A \cdot X = B$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов.

Матрица вида:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называется расширенной матрицей системы (4.1).

Теорема Кронекера-Капелли ***(о существовании решения системы линейных уравнений).*** Для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы:

$$\boxed{r(A) = r(A|B).}$$

Следствия из теоремы Кронекера-Капелли:

1. Если $r(A) < r(A|B)$, то система несовместна.
2. Если $r(A) = r(A|B) = n$ (где n – число неизвестных), то система совместна и определенна (имеет единственное решение).
3. Если $r(A) = r(A|B) < n$, то система совместна и неопределенна (имеет бесконечное множество решений).

Замечание 4.5. Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы – выяснить, определенна она или нет.

4.5. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений (метод последовательного исключения неизвестных)

Этот метод является универсальным потому, что позволяет решать системы любого числа уравнений с любым числом неизвестных, а если система не имеет решения, то метод позволяет установить это в ходе решения.

Метод Гаусса – это алгоритм последовательного исключения неизвестных из уравнений системы, который состоит из двух этапов:

I. Прямой ход метода Гаусса – приведение матрицы системы к *треугольному* или *ступенчатому* виду.

II. Обратный ход метода Гаусса – последовательное отыскание неизвестных, начиная с последних (по номеру), с помощью подстановки найденных значений неизвестных в предыдущие уравнения системы.

Рассмотрим метод Гаусса на примере решения системы m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Пусть в этой системе коэффициент при первом неизвестном $a_{11} \neq 0$. Если $a_{11} = 0$, то всегда можно перенумеровать неизвестные так, чтобы коэффициент при первом неизвестном стал отличен от нуля.

Исключим сначала неизвестное x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Для этого прежде всего разделим обе части первого уравнения на коэффициент $a_{11} \neq 0$, тогда получим новую систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \dfrac{a_{1k}}{a_{11}} x_k + \dots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.2}$$

Умножим теперь первое уравнение системы (4.2) на $(-a_{21})$ и сложим со вторым уравнением. Затем умножим первое на $(-a_{31})$ и сложим с третьим уравнением и т.д.

В результате получим новую систему, также равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1k}x_k + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2k}x_k + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots \\ \qquad a'_{i2}x_2 + \cdots + a'_{ik}x_k + \cdots + a'_{in}x_n = b'_i, \\ \ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mk}x_k + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{4.3}$$

Здесь введены обозначения:

$$a'_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}},\ a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{i1},\ k = 2,3,\ldots,n.$$

$$b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad b'_i = b_i - \frac{b_1}{a_{11}}a_{i1}, \qquad i = 2,3,\ldots,m.$$

Разделим теперь второе уравнение системы (4.3) на a'_{22}, предполагая, что он отличен от нуля; затем умножим второе уравнение полученной системы последовательно на $(-a'_{32})$, …, $(-a'_{i2})$, …, $(-a'_{m2})$ и сложим поочередно с соответствующими уравнениями системы, кроме первого и второго.

Замечание 4.6. Если, продолжая этот процесс, мы придем к системе, содержащей уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то система – несовместна.

В том случае, когда система совместна, мы придем либо к системе вида:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_k + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 + \cdots + c_{2k}x_k + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad x_p + \cdots + c_{pn}x_n = d_p. \end{cases} \tag{4.4}$$

(причем $p < n$), либо к системе вида:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_k + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 + \cdots + c_{2k}x_k + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = d_n. \end{cases} \tag{4.5}$$

Система вида (4.4) называется ступенчатой, а система вида (4.5) – треугольной.

В случае треугольной системы из последнего уравнения находим $x_n = d_n$, затем подставляя значения x_n в предыдущее уравнение, находим x_{n-1} и т.д.

Таким образом, если система уравнений (4.1) после выполнения ряда элементарных преобразований приводится к треугольной системе (4.5), то это означает, что система (4.1) является совместной и определенной.

Если система (4.1) после элементарных преобразований приводится к ступенчатой системе (4.4), то система (4.1) совместна и неопределенна.

Действительно, перенося в каждом из уравнений системы (4.4) члены с неизвестными $x_{p+1}, \ldots, x_n$ в правую часть, получим систему вида:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1p}x_p = d_1 - c_{1p+1}x_{p+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ \qquad x_2 + \cdots + c_{2p}x_p = d_2 - c_{2p+1}x_{p+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \qquad \qquad \ldots \\ \qquad \qquad x_p = d_p - c_{pp+1}x_{p+1} - \cdots - c_{pn}x_n. \end{cases}$$

Придавая неизвестным $x_{p+1}, \ldots, x_n$, которые называются свободными, произвольные значения, получим треугольную систему, из которой последовательно найдем все остальные неизвестные $x_1, \ldots, x_p$, называемые базисными. Так как неизвестные $x_{p+1}, \ldots, x_n$ могут принимать различные значения, то исходная система (4.1) имеет бесчисленное множество решений.

Переход системы (4.1) к равносильной ей системе (4.4) или (4.5) называется прямым ходом метода Гаусса, нахождение неизвестных из последних систем – обратным ходом.

Пример 4.4. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10, \\ 10x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 17, \\ 8x_1 + 17x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями строк приведем ее к ступенчатому виду.

Прямой ход:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&10&-7&10\\10&9&10&17\\8&17&1&8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&10&-7&10\\0&-91&80&-83\\0&-63&57&-72\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&10&-7&10\\0&-91&80&-83\\0&0&147&-1323\end{array}\right).$$

$r(A|B)=r(A)=3=n \Rightarrow$ система совместна и имеет единственное решение.

<u>Обратный ход:</u>

По полученной треугольной матрице выписываем систему:

$$\begin{cases}x_1+10x_2-7x_3=10,\\ \quad -91x_2+80x_3=-83,\\ \qquad\qquad 147x_3=-1323.\end{cases}$$

Определяем сначала значение переменной x_3 из последнего уравнения системы, затем значение переменной x_2 из второго уравнения, и, наконец, значение переменной x_1 из первого уравнения системы.

$$147x_3 = -1323 \Rightarrow x_3 = -9;$$

$$-91x_2 + 80 \cdot (-9) = -83 \Rightarrow -91x_2 = 637 \Rightarrow x_2 = -7;$$

$$x_1 + 10 \cdot (-7) - 7 \cdot (-9) = 10 \Rightarrow x_1 = 17.$$

Проверка:

$17 + 10 \cdot (-7) - 7 \cdot (-9) = 10$ – *верно*,

$10 \cdot 17 + 9 \cdot (-7) + 10 \cdot (-9) = 17$ – *верно*,

$8 \cdot 17 + 17 \cdot (-7) + (-9) = 8$ – *верно*.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 17 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Пример 4.5. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение.

<u>Прямой ход:</u>

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\2&1&8&1\\1&3&-1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&-3&6&1\\0&1&-2&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&-3&-1&1\\0&0&0&-2\end{array}\right)\Rightarrow$$

$r(A|B)=3,\ r(A)=2\Rightarrow$ система несовместна.

Ответ: решений нет.

Пример 4.6. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3=-7,\\2x_1-5x_2+8x_3=-8,\\4x_1-9x_2+20x_3=-10.\end{cases}$$

Решение:

<u>Прямой ход:</u>

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&-7\\2&-5&8&-8\\4&-9&20&-10\end{array}\right)\overset{\substack{\mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{II}\\ \mathrm{I}\cdot(-4)+\mathrm{III}}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&-7\\0&1&4&6\\0&3&12&18\end{array}\right)\overset{\mathrm{II}\cdot(-3)+\mathrm{III}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & -7\\ 0 & 1 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & -7\\ 0 & 1 & 4 & 6\end{array}\right).$$

Ранг матрицы коэффициентов $r(A|B)=r(A)=2$, а количество неизвестных равно 3. Следовательно, система уравнений совместна и имеет бесчисленное множество решений.

Выберем базисный минор: $\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{1} & \mathbf{-3} & 2 & -7\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$. Входящие в базисный минор переменные x_1 и x_2 – базисные переменные, x_3 – свободная переменная.

Пусть $x_3=\mathrm{C}$, где $\mathrm{C}\in\mathbb{R}$.

<u>*Обратный ход:*</u>

По полученной ступенчатой матрице выписываем систему:

$$\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3=-7,\\ \qquad x_2+4x_3=6.\end{cases}$$

Выразим базисные переменные через свободную:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - 2x_3 - 7 = 3(-4x_3 + 6) - 2x_3 - 7 = -14x_3 + 11, \\ x_2 = -4x_3 + 6. \end{cases}$$

Тогда $x_2 = -4C + 6$, $x_1 = -14C + 11$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14C + 11 \\ -4C + 6 \\ C \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

Проверка:

$$-14C + 11 - 3(-4C + 6) + 2C = -7 - \text{верно},$$
$$2(-14C + 11) - 5(-4C + 6) + 8C = -8 - \text{верно},$$
$$4(-14C + 11) - 9(-4C + 6) + 20C = -10 - \text{верно}.$$

Ответ: $X = C\begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти ранг матрицы $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ приведением ее к ступенчатому виду.

2. Найти ранги матриц:

a) $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$;

c) $$\begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix}.$$

3. Найти ранг матрицы при различных значениях параметра λ:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$.

4. Найти решение системы линейных уравнений в зависимости от значений параметра λ. При каких значениях λ система допускает решение с помощью обратной матрицы?

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 - 6x_4 = 4\lambda - 4, \\ x_1 + 7x_2 - 17x_3 + 16x_4 = -3\lambda - 3, \\ -4x_1 + x_2 - 19x_3 + \lambda x_4 = 12\lambda - 12, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 10x_4 = -6\lambda + 5. \end{cases}$$

Спасибо за внимание!