ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

РТУ МИРЭА
Кафедра ВМ-3

Горшунова Т.А.

Лекция 16

МНОГОЧЛЕНЫ И ИХ КОРНИ

19 декабря 2023 г.

16.1. Многочлены и действия над ними

Определение 16.1. ***Многочленом*** *степени* n $(n \in \mathbb{N})$ называется функция вида:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \ deg\, P = n,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – действительные или комплексные числа (коэффициенты), $a_n \neq 0$ – старший коэффициент многочлена, a_0 – свободный член. Независимая переменная z может принимать как действительные, так и комплексные значения.

$P(z) = az^2 + bz + c$ – многочлен второй степени,

$P(z) = az + b$ – многочлен первой степени.

Определение 16.2. Два многочлена $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ и $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0$ ***равны*** тогда и только тогда, когда их степени одинаковы $(n = m)$, и равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной: $P(z) = Q(z) \Leftrightarrow \begin{cases} deg\, P = deg\, Q \\ a_i = b_i, 0 \leq i \leq n \end{cases}.$

Для многочленов определены операции сложения и умножения.

1. Сложение многочленов

Многочлены складываются почленно. При сложении многочленов необходимо складывать коэффициенты при соответствующих степенях z.

Пример 16.1. Найти сумму многочленов $P(z) = 3z^3 + 2z^2 - 5z + 4$ и $Q(z) = -z^2 + 7z - 1$.

Решение.

$$P(z) + Q(z) = (3z^3 + 2z^2 - 5z + 4) + (-z^2 + 7z - 1) = 3z^3 + z^2 + 2z + 3.$$

2. Умножение многочленов

При перемножении многочленов необходимо раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

Пример 16.2. Найти произведение многочленов $P(z) = 3z^3 + 2z^2 - 5z + 4$ и

$Q(z) = -z^2 + 7z - 1$.

Решение. $P(z) \cdot Q(z) = (3z^3 + 2z^2 - 5z + 4)(-z^2 + 7z - 1) =$

$$= -3z^5 + 21z^4 - 3z^3 - 2z^4 + 14z^3 - 2z^2 + 5z^3 - 35z^2 + 5z -$$

$$-4z^2 + 28z - 4 = -3z^5 + 19z^4 + 16z^3 - 41z^2 + 33z - 4.$$

3. Деление многочленов

Пусть даны два многочлена $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ такие, что их степени $m \leq n$. Многочлен $Q(z)$ делит многочлен $P(z)$ без остатка, если существует многочлен $T(z)$ степени s, причем $s < n$ и $s + m = n$, такой что: $P(z) = Q(z) \cdot T(z)$.

Но не всегда один многочлен делит другой без остатка.

Теорема 16.1 (*теорема о делении с остатком*). Пусть заданы многочлены $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ и $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0$ степеней n и m соответственно, причем $Q(z)$ – ненулевой многочлен. Тогда существуют многочлены $T(z)$ и $R(z)$ такие, что:

$$P(z) = Q(z) \cdot T(z) + R(z), \; deg\, R < deg\, Q.$$

Многочлен $T(z)$ называют ***частным***, а многочлен $R(z)$ – ***остатком*** от деления $P(z)$ на $Q(z)$. Многочлены $T(z)$ и $R(z)$ определены однозначно.

Рассмотрим на примере способ деления многочлена степени n на многочлен степени m, при $n \geq m$. Этот алгоритм называется деление «уголком» и работает аналогично алгоритму деления «уголком» обычных чисел.

Пример 16.3. Разделить многочлен $P(z) = 4z^3 + 5z^2 - z + 10$ на многочлен $Q(z) = z^2 - z + 1$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l} 4z^3 + 5z^2 - z + 10 & \underline{z^2 - z + 1} \\ -\underline{4z^3 - 4z^2 + 4z} & \quad 4z + 9 \\ \qquad -9z^2 - 5z + 10 & \\ \qquad\ \ \underline{9z^2 - 9z + 9} & \\ \qquad\qquad\quad 4z + 1 & \end{array}$$

Частное $T(z) = 4z + 9$, остаток от деления $R(z) = 4z + 1 \Rightarrow$ по теореме 1:

$$4z^3 + 5z^2 - z + 10 = \underbrace{(z^2 - z + 1)}_{Q(z)} \cdot \underbrace{(4z + 9)}_{T(z)} + \underbrace{(4z + 1)}_{R(z)}.$$

Пример 16.4. Разделить многочлен $P(z) = z^5 - 1$ на многочлен $Q(z) = z - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l}
_{-}\,z^5 - 1 & \underline{z - 1\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{z^5 - z^4} & z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \\
\quad _{-}\,z^4 - 1 & \\
\quad \underline{z^4 - z^3} & \\
\qquad _{-}\,z^3 - 1 & \\
\qquad \underline{z^3 - z^2} & \\
\qquad\quad _{-}\,z^2 - 1 & \\
\qquad\quad \underline{z^2 - z} & \\
\qquad\qquad _{-}\,z - 1 & \\
\qquad\qquad \underline{z - 1\quad} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$

Схема Горнера

Рассмотрим алгоритм, который позволяет разделить многочлен $P(z)$ произвольной степени n на многочлен $z - z_0$.

Для многочлена $P(z)$ запишем теорему о делении с остатком:

$$P(z) = (z - z_0) \cdot Q(z) + R(z)$$

Очевидно, что $deg\, P = deg\, Q + 1$ и $R(z) = R$ – число.

Пусть $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \Rightarrow$ частное

$$Q(z) = b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0 \Rightarrow$$

$$P(z) = (z - z_0) \cdot (b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0) + R.$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$P(z) = b_{n-1} z^n + (b_{n-2} - z_0 b_{n-1}) z^{n-1} + \ldots + (b_0 - z_0 b_1) z + (R - z_0 b_0).$$

По определению равенства многочленов, многочлены равны, когда равны коэффициенты при соответствующих степенях:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} - z_0 b_{n-1} = a_{n-1} \Rightarrow b_{n-2} = a_{n-1} + z_0 b_{n-1},$$

$$\ldots$$

$$b_0 - z_0 b_1 = a_1 \Rightarrow b_0 = a_1 + z_0 b_1,$$

$$R - z_0 b_0 = a_0 \Rightarrow R = a_0 + z_0 b_0 \,.$$

Результаты вычисления удобно записывать в специальную таблицу, которую называют *схемой Горнера*. В первой строке таблицы, начиная со второго столбца, выписывают коэффициенты многочлена – делимого, во второй строке таблицы сначала выписывают z_0, затем, начиная о второго столбца – коэффициенты многочлена, который является частным от деления.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_{i+1}	a_i	$\dots$	a_2	a_1	a_0
z_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_i	b_{i-1}	$\dots$	b_1	b_0	$R(z)$

Схема Горнера:

	a_n старший коэффициент	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0 свободный член
z_0	$b_{n-1} = a_n$ старший коэффициент	$b_{n-2} = a_{n-1} + z_0 b_{n-1}$	$\dots$	$b_0 = a_1 + z_0 b_1$ свободный член	$R = a_0 + z_0 b_0$ остаток

Пример 16.5. Разделить многочлен $z^3 - 4z^2 + 7z - 3$ на двучлен $z - 1$.

Решение. Используем схему Горнера:

	1	-4	7	-3
$z_0 = 1$	1	$-4 + 1 = -3$	$7 - 3 = 4$	$-3 + 4 = 1$

Получили коэффициенты частного и остаток:

$$z^3 - 4z^2 + 7z - 3 = (z^2 - 3z + 4)(z - 1) + 1.$$

Пример 16.6. Разделить многочлен $P(z) = -z^4 + 2z^3 + 3z^2 - z + 4$ на $z - 3$, пользуясь схемой Горнера.

Решение.

	-1	2	3	-1	4
$z_0 = 3$	-1	$2 + 3(-1) = -1$	$3 + 3(-1) = 0$	$-1 + 3 \cdot 0 = -1$	$4 + 3(-1) = 1$

Ответ: $P(z) = (-z^3 - z^2 - 1)(z - 3) + 1.$

16.2. Корни многочлена и их кратность. Теорема Безу

Рассмотрим многочлен $P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0$ и пусть c – произвольное число. Выражение $P(c)=a_n c^n+a_{n-1}c^{n-1}+\ldots+a_1 c+a_0$ называется *значением многочлена* $P(z)$ при $z=c$.

Теорема 16.2 (*Теорема Безу*). Остаток от деления многочлена $P(z)$ на двучлен $z-z_0$ равен $P(z_0)$ (значению многочлена при $z=z_0$).

►Для любого многочлена $P(z)$ найдется такой многочлен $Q(z)$ степени $(n-1)$, что справедливо равенство: $P(z)=(z-z_0)Q(z)+R$. Подставим z_0 в это равенство: $P(z_0)=(z_0-z_0)Q(z_0)+R\Rightarrow$ остаток $R=P(z_0)$.◄

Пример 16.7. Найти остаток от деления многочлена $P(z)$:

$$P(z)=3z^9-2z^5+3z^2+4z-8 \text{ на двучлен } z+1.$$

Решение. Так как остаток $R=P(z_0)$ и $z_0=-1\;\Rightarrow$

$$P(-1)=3(-1)^9-2(-1)^5+3(-1)^2+4(-1)-8=$$

$$=-3+2+3-4-8=-10, R=-10 \text{ – остаток.}$$

Ответ: -10 .

Определение 16.3. Число z_0 называют ***корнем многочлена*** $P(z)$, если $P(z_0) = 0$.

Пример 16.8. Проверить, что $z_0 = 1$ является корнем многочлена $P(z)$:

$$P(z) = z^3 + 5z^2 - 2z - 4.$$

Решение. $1^3 + 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0 \Rightarrow z_0 = 1$ – корень многочлена $P(z)$.

Следствие из теоремы 16.2. Для того чтобы число z_0 было корнем многочлена $P(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $P(z)$ делился на $z - z_0$ без остатка: $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.

►*Необходимость*. Пусть z_0 – корень многочлена $P(z) \Rightarrow P(z_0) = 0$. По теореме Безу $R = P(z_0) \Rightarrow R = 0$. Следовательно, $z - z_0$ делит $P(z)$ без остатка.

Достаточность. Пусть $P(z)$ делиться на $z - z_0$ без остатка, т.е. $R = 0$. По теореме Безу $R = P(z_0) \Rightarrow P(z_0) = 0$ и z_0 – корень многочлена $P(z)$ по определению. ◄

Кратность корня

Определение 16.4. Число z_0 называется *корнем кратности* k многочлена $P(z)$, если $P(z) = (z - z_0)^k Q(z)$, где многочлен $Q(z)$ не делится на $(z - z_0)$ без остатка

($Q(z_0) \neq 0$). Если кратность корня z_0 равна единице ($k = 1$), то z_0 называют *простым корнем*.

Теорема 16.3 (*Основная теорема алгебры*). Пусть $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $deg\, P \geq 1$ многочлен с комплексными коэффициентами. Тогда $P(z)$ имеет хотя бы один комплексный корень (без доказательства).

Если многочлен $P(z)$ имеет корень z_1 кратности $k_1 \Rightarrow$

$$P(z) = (z - z_1)^{k_1} Q(z),\ deg\, Q = n - k_1.$$

К многочлену $Q(z)$, если $n - k_1 \geq 1$ можно опять применить основную теорему алгебры.

Таким образом, если $z_1, z_2, \ldots, z_m$ – корни многочлена $P(z)$ (действительные или комплексные), а их кратности, соответственно, $k_1, k_2, \ldots k_m$, то данный многочлен можно разложить на множители следующим образом:

$$\boxed{P(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m},}$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Теорема 16.4 (*Теорема Гаусса*). Всякий многочлен степени n имеет в комплексной области ровно n корней (действительных или комплексных), если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

16.3. Комплексные корни многочленов с действительными (вещественными) коэффициентами

Теорема 16.5. Если комплексное число z_0 является корнем многочлена $P(z)$ с действительными коэффициентами, то и сопряженное к нему число $\overline{z}_0$ также является корнем многочлена $P(z)$.

►Пусть $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ – многочлен с действительными коэффициентами ($a_k \in \mathbb{R}$) и z_0 – комплексный корень, тогда $P(z_0) = 0 \Rightarrow a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0$.

По свойству операции сопряжения

$$\overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0 \Rightarrow \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} = 0.$$

Так как $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – действительные числа, то

$$\overline{a_n} = a_n, \overline{a_{n-1}} = a_{n-1}, \ldots, \overline{a_1} = a_1, \overline{a_0} = a_0,$$

$$\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} = a_n (\overline{z_0})^n + a_{n-1} (\overline{z_0})^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \Rightarrow$$

$$a_n (\overline{z_0})^n + a_{n-1} (\overline{z_0})^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $\overline{z_0}$ – корень многочлена $P(z)$. ◄

Отсюда следует, что многочлен с действительными (вещественными) коэффициентами всегда имеет чётное число комплексных (невещественных) корней.

Теорему 16.5 можно обобщить следующим образом.

Теорема 16.6. Пусть $P(z)$ – многочлен с действительными коэффициентами. Если комплексное число z_0 является корнем кратности k многочлена $P(z)$, то и сопряженное к нему число $\bar{z}_0$ также является корнем кратности k многочлена $P(z)$.

Следствие. Любой многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

Теорема 16.7. Если $P(z)$ – многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $z_0 = x_0 + iy_0$, то он делится без остатка на квадратный трехчлен $z^2 + pz + q$, где $p = -2\,Re\,z_0 = -2x_0 \in \mathbb{R}$, $q = x_0^2 + y_0^2 = |z_0|^2 \in \mathbb{R}$.

►Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ – корень многочлена $P(z)$, тогда по теореме 5 $\overline{z_0} = x_0 - iy_0$ также корень $P(z) \Rightarrow P(z)$ делится без остатка на $(z - z_0)(z - \overline{z_0})$.

Преобразуем последнее выражение:

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - z\overline{z_0} - zz_0 + z_0\overline{z_0} = z^2 - z(\overline{z_0} + z_0) + z_0\overline{z_0},$$

$$\overline{z_0} + z_0 = x_0 - iy_0 + x_0 + iy_0 = 2x_0 = 2\,Re\,z_0 \in \mathbb{R},$$

$$z_0\overline{z_0} = (x_0 + iy_0)(x_0 - iy_0) = x_0^2 + y_0^2 = |z_0|^2 \in \mathbb{R}\,. \blacktriangleleft$$

Таким образом, каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен на множители с действительными коэффициентами:

$$\boxed{P(z) = a_n(z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}(z^2 + p_1 z + q_1)^{s_1} \dots (z^2 + p_t z + q_t)^{s_t}.}$$

Пример 16.9. Найти произведение комплексных (невещественных) корней многочлена $P(z) = 3z^3 - 7z^2 + 3z - 7$.

Решение.

$$3z^3 - 7z^2 + 3z - 7 = z^2(3z - 7) + (3z - 7) = (3z - 7)(z^2 + 1) \Rightarrow$$

$$3z - 7 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{7}{3}, \qquad z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z_{2,3} = \pm i.$$

Таким образом, $P(z)$ имеет три корня: один действительный $z = \frac{7}{3}$ и два комплексно-сопряженных $z = \pm i$. Произведение комплексных корней равно 1.

Пример 16.10. Известно, что комплексное число $z_0 = -2 - 3i$ является корнем многочлена $P(z) = z^4 + z^3 - 3z^2 - 55z - 52$. Разложить многочлен на линейные множители и на множители с действительными коэффициентами.

Решение. $z_0 = -2 - 3i \Rightarrow Re\, z_0 = -2, Im\, z_0 = -3 \Rightarrow$

$$|z_0|^2 = (-2)^2 + (-3)^2 = 13.$$

Поскольку $P(z)$ – многочлен с действительными коэффициентами, то число $\overline{z_0} = -2 + 3i$ также является его корнем $\Rightarrow$ многочлен $P(z)$ делится на квадратный трехчлен: $z^2 + pz + q = (z - z_0)(z - \overline{z_0})$, где $p = -2\, Re\, z_0 = 4$,

$$q = |z_0|^2 = 13 \Rightarrow z^2 + pz + q = z^2 + 4z + 13.$$

Поделим многочлен $P(z)$ на квадратный трехчлен $z^2 + 4z + 13$ «уголком»:

$$\begin{array}{l|l}
_\, z^4 + z^3 - 3z^2 - 55z - 52 & \underline{z^2 + 4z + 13} \\
\quad \underline{z^4 + 4z^3 + 13z^2} & z^2 - 3z - 4 \\
\qquad _\, -3z^3 - 16z^2 - 55z - 52 & \\
\qquad \quad \underline{-3z^3 - 12z^2 - 39z} & \\
\qquad \qquad _\, -4z^2 - 16z - 52 & \\
\qquad \qquad \quad \underline{-4z^2 - 16z - 52} & \\
\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 &
\end{array}$$

Тогда $P(z) = (z^2 + 4z + 13)(z^2 - 3z - 4)$. Найдём корни полученного частного: $z^2 - 3z - 4 = 0$. Дискриминант: $D = 9 + 16 = 25 > 0 \Rightarrow$ корни действительные:

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \left[\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}\right. \Rightarrow z^2 - 3z - 4 = (z+1)(z-4) \Rightarrow$$

$P(z) = (z^2 + 4z + 13)(z+1)(z-4)$ – разложение на множители с действительными коэффициентами,

$P(z) = (z - (-2-3i))(z - (-2+3i))(z+1)(z-4)$ – разложение на линейные множители.

Замечание. Если в разложении $P(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}$ раскрыть скобки, то свободный член равен произведению коэффициента при старшей степени на корни многочлена. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 16.8 (*Теорема о рациональном корне*). Если многочлен с целыми коэффициентами $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_k \in \mathbb{Z}$ имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, то числитель p является делителем свободного коэффициента a_0, а знаменатель q – делителем старшего коэффициента a_n.

Пример 16.11. Найти целые корни уравнения $z^5 + 4z^4 - 14z^2 - 17z - 6 = 0$.

Решение. Целые корни ищем среди делителей свободного члена многочлена

$$P(z) = z^5 + 4z^4 - 14z^2 - 17z - 6 \Rightarrow \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6.$$

Проверим по схеме Горнера каждое из этих чисел.

	1	4	0	-14	-17	-6	
1	1	5	5	-9	-26	$-32 \neq 0$	не корень
-1	1	3	-3	-11	-6	0	корень
-1	1	2	-5	-6	0		корень (кратности 2)
-1	1	1	-6	0			корень (кратности 3)
-1	1	0	$-6 \neq 0$				не корень
2	1	3	0				корень
-3	1	0					корень

Данное уравнение имеет 5 корней и все они целые: $-3, -1$ и 2, причем -1 – корень кратности 3, а корни -3 и 2 – простые корни.

$$z^5 + 4z^4 - 14z^2 - 17z - 6 \; = (z+3)(z-2)(z+1)^3.$$

Пример 16.12. Найдите произведение комплексных (невещественных) корней уравнения $z^3 - z^2 - 4z - 6 = 0$.

Решение. Разложим многочлен $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$ на множители, подобрав вещественный корень. Делители свободного члена: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

$$P(1) = -10; \quad P(-1) = -4; \; P(2) = -10; \; P(-2) = -10; \; P(3) = 0 \Rightarrow$$

$$z_0 = 3 \text{ – корень многочлена } P(z).$$

Поделим уголком многочлен $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$ на двучлен $z - 3$:

$$\begin{array}{l|l}
_\; z^3 - z^2 - 4z - 6 & \underline{z - 3} \\
\underline{z^3 - 3z^2} & z^2 + 2z + 2 \\
\qquad _\; 2z^2 - 4z & \\
\qquad \underline{\;\; 2z^2 - 6z} & \\
\qquad\qquad _\; 2z - 6 & \\
\qquad\qquad \underline{\;\; 2z - 6} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$z^3 - z^2 - 4z - 6 = (\mathrm{z}^2 + 2z + 2)(z - 3).$$

Найдём корни многочлена $\mathrm{z}^2 + 2z + 2$:

$$\mathrm{z}^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow \text{дискриминант } D = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow$$

корни комплексно-сопряженные:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \left[\begin{matrix} -1 + i \\ -1 - i \end{matrix}\right. \Rightarrow$$

$$\mathrm{z}^2 + 2z + 2 = (z - (-1 - i))(z - (-1 + i)) \Rightarrow$$

Уравнение $z^3 - z^2 - 4z - 6 = 0$ имеет три корня:

$$z_1 = 3,\ \ z_2 = -1 + i \text{ и } z_3 = -1 - i.$$

Найдем произведение комплексных корней уравнения:

$$(-1 - i)(-1 + i) = (-1)^2 + (-1)^2 = 2.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Напишите многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 2 и корнями $z_1 = 1$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 2$, $z_4 = i$.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что коэффициенты многочлена являются действительными числами.

3. Найдите произведение комплексных (невещественных) корней уравнения $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 4z + 2 = 0$.

4. Разложить многочлен $P(z) = 2z^3 - z^2 - 7z + 6$ на линейные множители.

5. Разложить многочлен $P(z) = 5z^4 - 32z^3 + 67z^2 - 52z + 12$ на линейные множители.

6. Разложить многочлен $P(z) = z^4 - 3z^3 - 5z^2 + 29z - 30$ на линейные множители, если известен один корень $z_1 = 2 + i$.

Спасибо за внимание!