ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция № 15

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА (продолжение)

- Показательная форма комплексных чисел
- Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме
- Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа

12 декабря 2023 г.

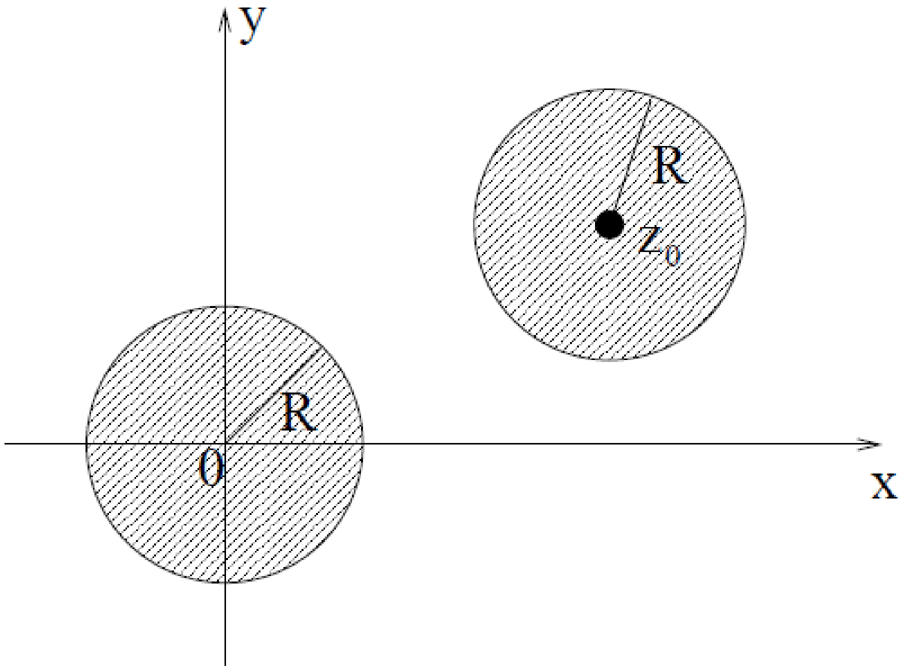
15.1. Некоторые простейшие множества точек на комплексной плоскости

Все точки комплексной плоскости с одинаковыми модулем равным R удовлетворяют уравнению: $|z| = R$ или $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, т.е. лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом R.

Множество комплексных точек, расположенных внутри этой окружности, определяются неравенством: $|z| < R$, а вне окружности неравенством: $|z| > R$.

Если центр окружности сместить в точку z_0, то ее уравнение будет иметь вид:

$$|z - z_0| = R$$

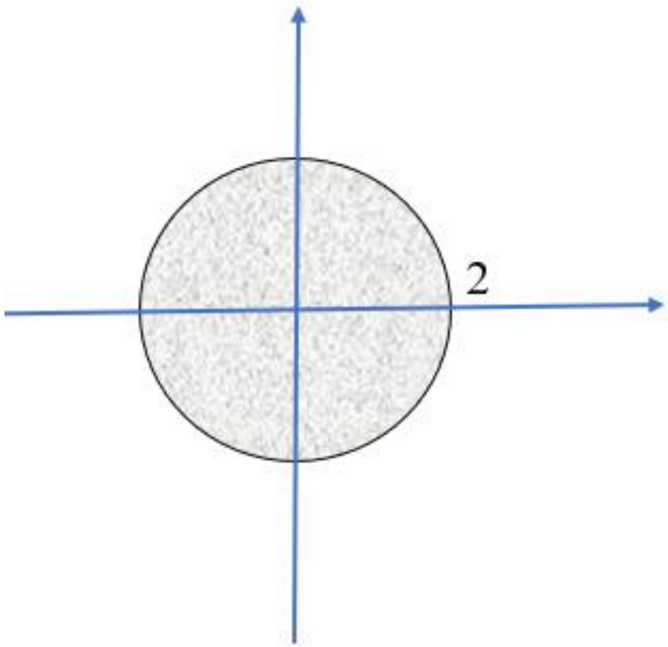


Пример 15.1. Изобразить множество решений неравенств:

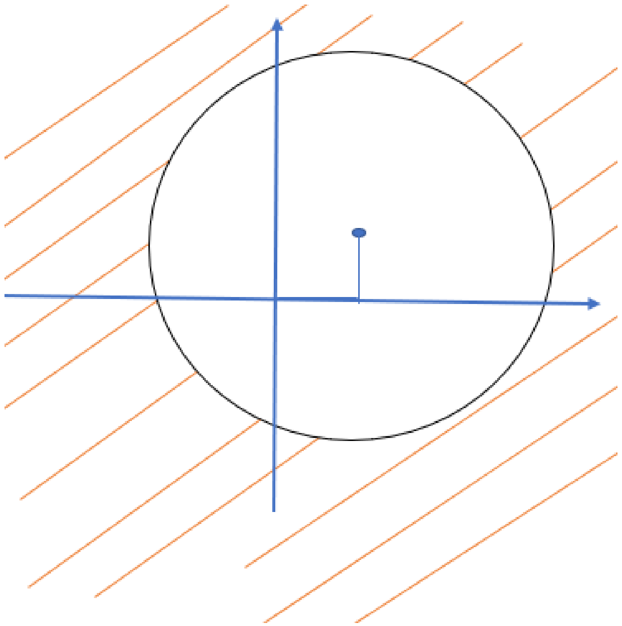
а) $|z| \le 2$; ***б)*** $|z - 1 - i| \ge 3$.

Решение:

а)



б)



15.2. Показательная форма комплексного числа

Леонард Эйлер вывел формулу, связывающую показательную функцию e^{φ} и тригонометрические функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{15.1}$$

(15.1) – формула Эйлера.

Доказательство формулы Эйлера с помощью разложения функции в ряд Тейлора:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \cdots\right) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Используя формулу Эйлера, из тригонометрической формы комплексного числа можно получить показательную:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}, \tag{15.2}$$

где $r = |z|, \varphi = argz.$

Очевидно, что $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \Rightarrow$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Функция $e^{i\varphi}$ обладает обычными свойствами показательной функции для действительного аргумента:

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах:

1) При умножении двух комплексных чисел в тригонометрической или показательной формах модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_1)} = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

2) При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\, e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

3) Возведение комплексного числа в целую степень.

При возведении в степень $n \in \mathbb{N}$ комплексного числа z, модуль комплексного числа возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени:

$$|z^n| = |z|^n,\ arg(z^n) = n\, arg\, z\,.$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Тогда справедлива формула:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |z|^n\, e^{in\varphi}. \qquad (15.3)$$

Формула (15.3) называется ***формулой Муавра***.

Пример 15.2. Представить число $z = -5i$ в показательной форме.

Решение. Число находится на мнимой оси и визуально можно определить, что $|z| = 5, \arg z = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -5i = 5e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$.

Пример 15.3. Вычислить $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2+2i}$.

Решение.

$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2+2i} = \frac{2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}{2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}.$$

Пример 15.4. Вычислить $(2+2i)^4\left(-1+\sqrt{3}i\right)^5$.

Решение.

$$(2+2i)^4\left(-1+\sqrt{3}i\right)^5 = \left(2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^4\left(2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^5 = 2^6e^{i\pi}\cdot 2^5e^{i\left(\frac{10\pi}{3}\right)} =$$

$$= 2^{11}e^{i\left(\frac{13\pi}{3}\right)} = 2^{11}e^{i\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)} = 2^{11}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2^{11}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) =$$

$$2^{11}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{10} + 2^{10}\sqrt{3}i.$$

Пример 15.5. Вычислить $\left(2-2\sqrt{3}i\right)^{100}$.

Решение. $z = 2-2\sqrt{3}i = \left(2;-2\sqrt{3}\right) \in IV$ четверти,

$$|z| = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4,\ argz = arctg\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Тригонометрическая форма: $z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Показательная форма: $z = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

Возведём число z в степень по формуле Муавра (используем показательную форму этого числа):

$$z^{100} = \left(4e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^{100} = 4^{100}e^{i\left(-\frac{100\pi}{3}\right)} = 4^{100}e^{i\left(-34\pi+\frac{2\pi}{3}\right)} =$$

$$= 4^{100}(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)) = 4^{100}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

15.3. Извлечение корня из комплексного числа

Из геометрической интерпретации вытекает правило равенства комплексных чисел в показательной форме.

Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то равенство $z_1 = z_2$ выполняется тогда и только тогда, когда равны модули этих чисел: $r_1 = r_2$, а аргументы отличаются на целое число периодов 2π: $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2|, \\ arg z_1 = arg z_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Определение 15.1. Комплексное число w называется ***корнем n-ой степени*** из комплексного числа z, если $w^n = z$. Обозначается $w = \sqrt[n]{z}, n \in \mathbb{N}$.

Запишем каждое из комплексных чисел z и w в показательной форме:

$$z = re^{i\varphi}, \qquad w = \rho e^{i\psi}.$$

Так как $w^n = z \Rightarrow \rho^n e^{in\psi} = re^{i\varphi}$: $w^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \psi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} i}, k \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что среди всевозможных значений корней $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} i}, k \in \mathbb{Z}$ имеется ровно n различных значений: $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$.

Поскольку модули всех корней n-ой степени одинаковы, а аргументы отличаются друг от друга на угол $\frac{2\pi}{n} < 2\pi$, то числа $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ – различны.

$$k = 0 \Rightarrow \psi_0 = \frac{\varphi}{n},$$

$$k = 1 \Rightarrow \psi_1 = \frac{\varphi+2\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n},$$

$$k = 2 \Rightarrow \psi_2 = \frac{\varphi + 4\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n},$$

$$\ldots$$

$$k = n - 1 \Rightarrow \psi_{n-1} = \frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}.$$

При $k = n \Rightarrow \psi_n = \frac{\varphi+2\pi n}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi = \psi_0 + 2\pi$, т.е. $z_n = z_0$.

Аналогично, $k = n + 1 \Rightarrow \psi_{n+1} = \frac{\varphi+2\pi(n+1)}{n} = \psi_1 + 2\pi$, т.е. $z_{n+1} = z_1$ и так далее.

Таким образом, уравнение $w^n = z, \forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0\ \ n \in \mathbb{N}$ имеет ровно n различных корней, которые могут быть найдены по формулам:

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n} i}, \; k = 0,1,2,\ldots,n-1\,. \qquad (15.4)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\,sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k = 0,1,2,\ldots,n-1\,. \qquad (15.5)$$

Замечание 15.1. На комплексной плоскости эти точки располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

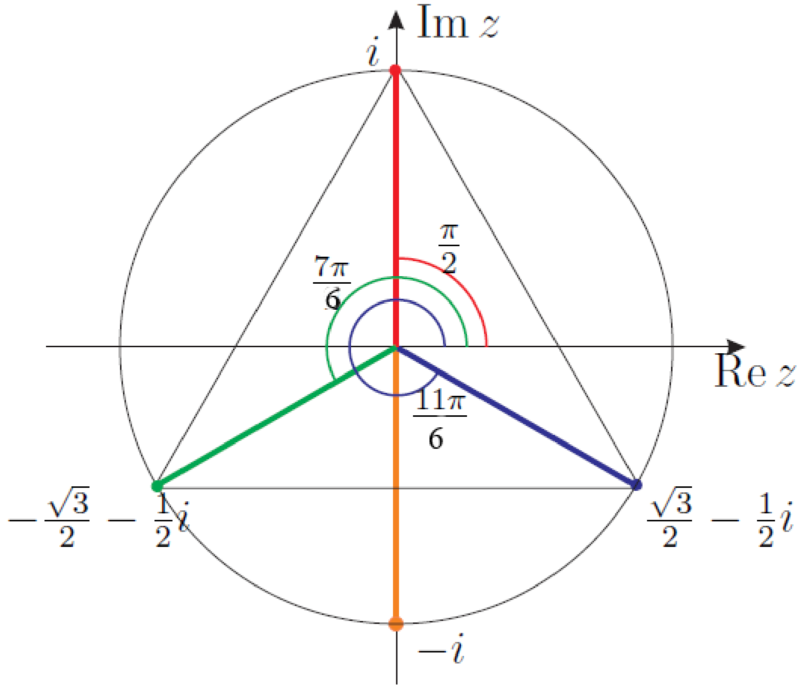
Пример 15.6. Вычислить $\sqrt[3]{-i}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

Решение: $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1 \cdot e^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)i}} = e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} i}$; $k = 0,1,2.$

$$z_0 = e^{\left(-\frac{\pi}{6}\right)i} = cos\frac{11\pi}{6} + i\,sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\,;$$

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} = \left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}\right) = i\,;$$

$$z_2 = e^{\frac{7\pi}{6}i} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\,.$$



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;\ i\,; -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Пример 15.7. Решить уравнение: $z^3 + 1 = 0$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

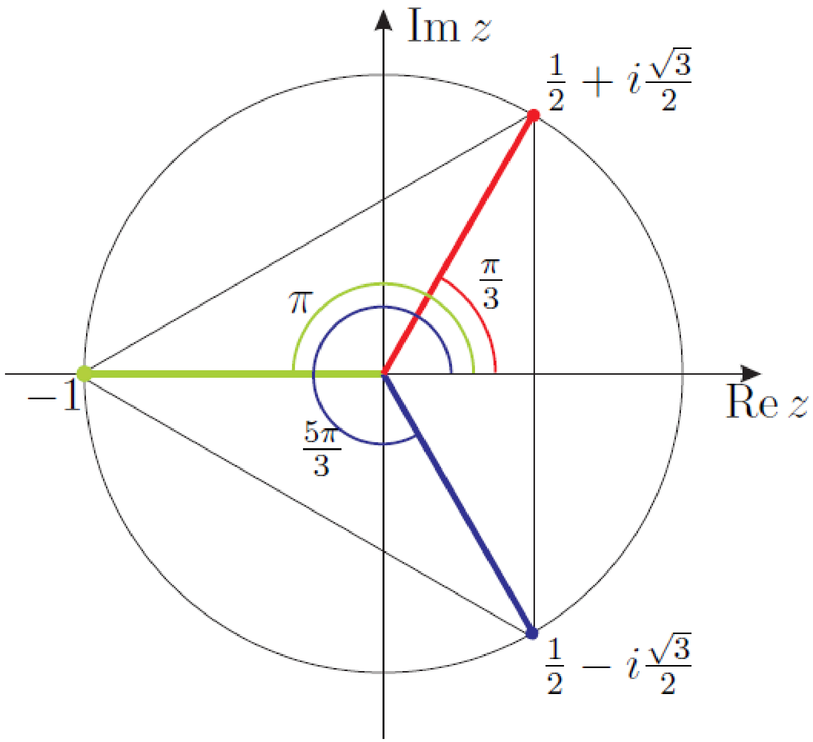
Решение. $z^3+1=0 \Rightarrow z^3=-1 \Rightarrow z=\sqrt[3]{-1}$,

$$z=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1\cdot e^{\pi i}}=e^{\frac{\pi+2\pi k}{3}i},\ k=0,1,2.$$

$$z_1=e^{\frac{\pi}{3}i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ \ (k=0);$$

$$z_2=e^{\pi i}=-1\ \ (k=1);$$

$$z_3=e^{\frac{5\pi}{3}i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ \ (k=2).$$



Ответ: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i; -1\,; \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Пример 15.8. Найти значение аргумента произведения корней уравнения: $z^5-32=0$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Im} z<0$. Ответ записать в градусах в интервале $[0,360)$.

Решение. $z^5-32=0 \Rightarrow z^5=32 \Rightarrow$

$$z = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{32(\cos 0 + i\sin 0)} = 2\left(\cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}\right) = 2e^{\frac{2\pi k}{5}i},$$
$$k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$z_1 = 2e^0 = 2, \quad z_2 = 2e^{\frac{2\pi}{5}i}, \quad z_3 = 2e^{\frac{4\pi}{5}i}, \quad z_4 = 2e^{\frac{6\pi}{5}i}, \quad z_5 = 2e^{\frac{8\pi}{5}i}.$$

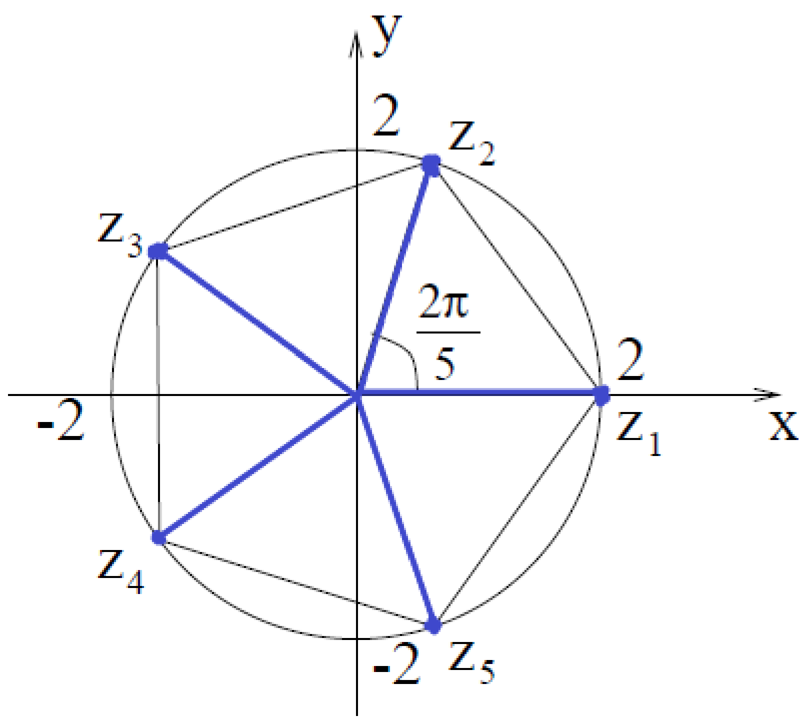
Из рисунка видно, что $\mathrm{Im}\, z_4 < 0$ и $\mathrm{Im}\, z_5 < 0$.

Найдем произведение $z_4 \cdot z_5$:

$$z_4 \cdot z_5 = 2e^{\frac{6\pi}{5}i} \cdot 2e^{\frac{8\pi}{5}i} = 4e^{\left(\frac{6\pi}{5}+\frac{8\pi}{5}\right)i} =$$

$$= 4e^{\frac{14\pi}{5}i} = 4e^{\left(2\pi+\frac{4\pi}{5}\right)i} = 4e^{\frac{4\pi}{5}i} \Rightarrow$$

$$|z_4 \cdot z_5| = 4, \ \arg(z_4 \cdot z_5) = \frac{4\pi}{5} = 144° \in [0{,}360).$$



Ответ: 144.

Пример 15.9. Решить уравнение $z^8 + z^4 + 1 = 0$. Результат изобразить на комплексной плоскости. Найти корни уравнения, удовлетворяющие условию $Re\, z > 0$.

Решение. Обозначим $z^4 = t \Rightarrow$ уравнение $z^8 + z^4 + 1 = 0$ перепишется в виде:

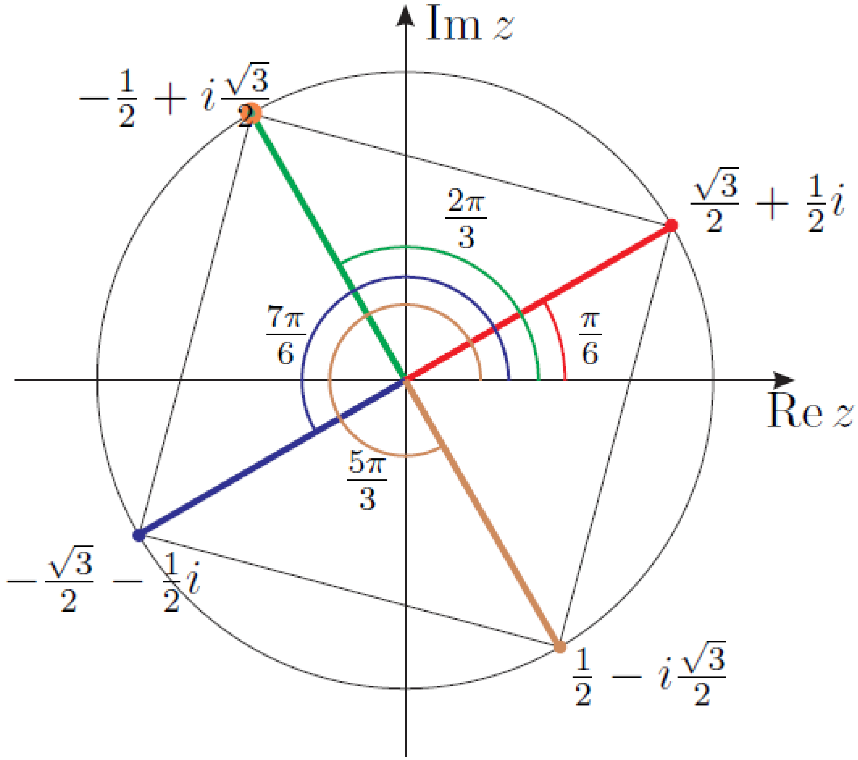
$$t^2 + t + 1 = 0\ .$$

Найдём корни квадратного уравнения: дискриминант $D = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3i^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right. \Rightarrow z^4 = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right. \Rightarrow$$

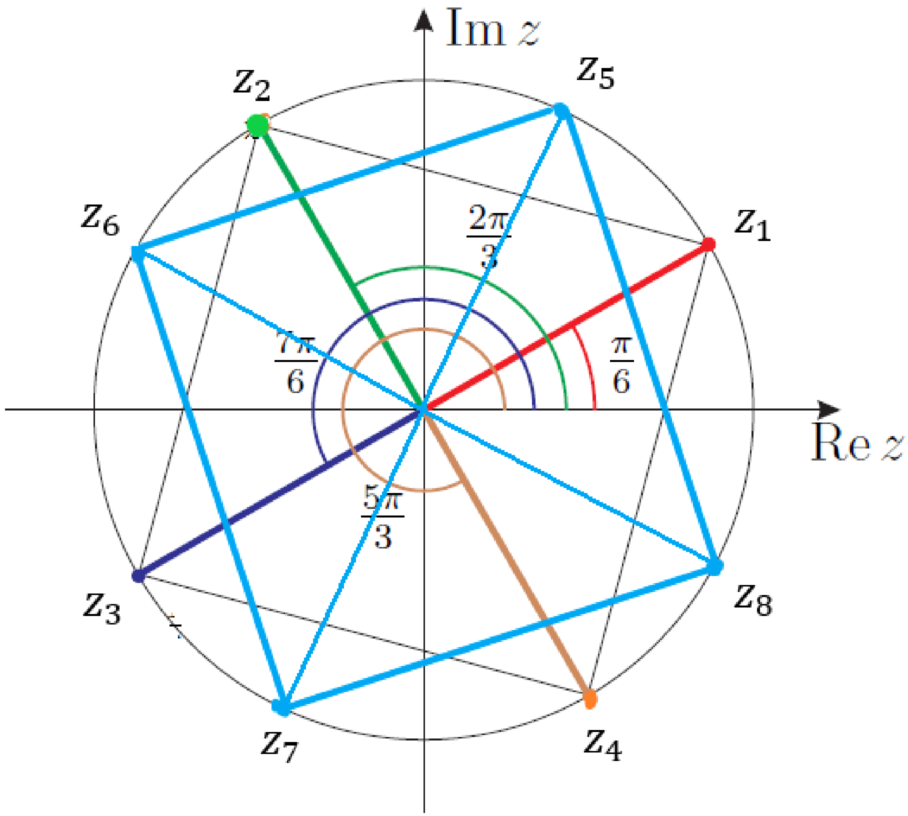
1) $z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \Rightarrow z = \sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} = \sqrt[4]{e^{\frac{2\pi}{3} i}} = e^{\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} i}, \; k = 0, 1, 2, 3 .$

$$z_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} = \begin{cases} e^{\frac{\pi}{6} i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i, \\ e^{\frac{2\pi}{3} i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \\ e^{\frac{7\pi}{6} i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i, \\ e^{\frac{5\pi}{3} i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i. \end{cases}$$



$$2)\ z^4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z=\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\sqrt[4]{e^{\frac{4\pi}{3}i}}=e^{\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{4}i},\ k=0,1,2,3.$$

$$z_{5,6,7,8}=\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\begin{cases} e^{\frac{\pi}{3}i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ e^{\frac{5\pi}{6}i}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, \\ e^{\frac{4\pi}{3}i}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ e^{\frac{11\pi}{6}i}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i. \end{cases}$$



$$Re\ z_1>0,\ Re\ z_4>0,\ \mathrm{Re}\ z_5>0,\ Re\ z_8>0\ .$$

Ответ: $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_5=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_8=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ .$

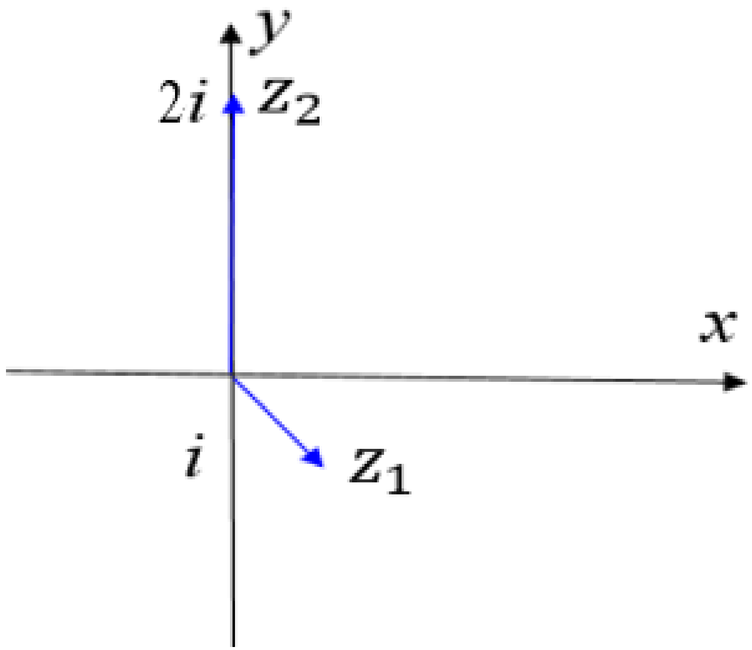
Пример 15.10. Решить уравнение $z^2 - (1+i)z + 2(1+i) = 0$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

Решение. Найдём корни квадратного уравнения $z^2 - (1+i)z + 2(1+i) = 0$:

$$D = (1+i)^2 - 8(1+i) = 1 + 2i - 1 - 8 - 8i = -6i - 8 = 1 - 6i - 9 =$$

$$= 1^2 - 2 \cdot 3i + (-3i)^2 = (1-3i)^2 \Rightarrow$$

$$z_{1,2} = \frac{1 + i \pm \sqrt{(1-3i)^2}}{2} = \frac{1 + i \pm (1-3i)}{2} = \left[\begin{array}{l} 1 - i, \\ 2i. \end{array}\right.$$



Задачи для самостоятельного решения

1*. При каких действительных значениях x и y числа

$$z_1 = x^2 + 4y - yi \text{ и } z_2 = 4 + y - \frac{2}{i} - x^2 i$$

будут сопряженными?

2*. Доказать, что если $|z| = 1$, то $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

3*. Решить уравнение $|\bar{z}| - 2z = 2i - 1$ на множестве комплексных чисел.

4*. Найти модуль и аргумент комплексного числа z, если:

a) $z = \dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)^2}{\left(sin\frac{3\pi}{10}+i\,cos\frac{7\pi}{10}\right)^2}$;   *b)* $z = \left(1 - \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)^2\left(1 - i\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{10}\right)^2$.

5*. Найти комплексные числа, сопряженные своим квадратам.

6*. Найти комплексные числа, сопряженные своим кубам.

7*. Выяснить, при каких условиях произведение двух комплексных чисел чисто мнимо.

Спасибо за внимание!