ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

РТУ МИРЭА
Кафедра ВМ-3

Горшунова Т.А.

Лекция 14

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

- Определение комплексных чисел и действия над ними.
- Алгебраическая форма комплексного числа, его изображение на плоскости.
- Сопряжение комплексных чисел. Свойства операции сопряжения.
- Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.
- Показательная форма комплексных чисел и действия над комплексными числами в показательной форме.
- Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа.

05 декабря 2023 г.

14.1. Определение комплексных чисел и действия над ними

Определение 14.1. ***Комплексным числом*** z называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Число x называется ***действительной частью*** комплексного числа $x = Re\, z$, число y называется ***мнимой частью*** комплексного числа $y = Im\, z$.

$$z = (x; y) \Rightarrow x = Re\, z, y = Im\, z.$$

Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Алгебраическая форма записи комплексного числа:

$$z = x + iy. \qquad 14.1)$$

Символ i называется ***мнимой единицей.*** Для мнимой единицы справедливо равенство:

$$i^2 = -1. \qquad (14.2)$$

Любое действительное число является комплексным, с нулевой мнимой частью: $\forall x \in \mathbb{R}: x = x + i \cdot 0 = (x; 0)$.

Следовательно, множество всех действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Комплексные числа с нулевой действительной частью называются чисто мнимыми: $z = iy = 0 + iy = (0; y)$.

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется действительное число равное $\sqrt{x^2 + y^2}$, обозначается $|z|$:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{14.3}$$

Очевидно, что $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Определение 14.2. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются ***равными***, если равны их действительная и мнимая части:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

1. ***Сумма*** комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \Rightarrow$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

2. *Разность* комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \Rightarrow$$

$$\boxed{z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).}$$

3. *Произведение* комплексного числа $z = x + iy$ ***на число*** $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha z = \alpha(x + iy) = \alpha x + i \cdot \alpha y \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha z = \alpha x + i\alpha y.}$$

4. *Произведение* комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 =$$

$$= [i^2 = -1] = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \Rightarrow$$

$$\boxed{z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2).}$$

Пример 14.1. Найти решения уравнения:

$$(3 + 2i)x + (2 - i)y = -1 + 4i,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Решение. Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:

$$(3+2i)x+(2-i)y=3x+2ix+2y-iy=(3x+2y)+(2x-y)i \Rightarrow$$
$$(3x+2y)+(2x-y)i=-1+4i\ .$$

Из определения равенства двух комплексных чисел получаем:

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=-1 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=-2.$$

Пример 14.2. Для комплексных чисел $z_1=6-5i$ и $z_2=-2+3i$ найти z_1+z_2, z_1-z_2 и z_1z_2.

Решение.

$$z_1+z_2=(6-5i)+(-2+3i)=(6-2)+(-5+3)i=4-2i,$$
$$z_1-z_2=(6-5i)-(-2+3i)=(6+2)+(-5-3)i=8-8i,$$
$$z_1z_2=(6-5i)(-2+3i)=-12+18i+10i-15i^2=3+28i.$$

Свойства арифметических операций на множестве комплексных чисел:

1) Коммутативность сложения и умножения:

$$z_1+z_2=z_2+z_1, \quad z_1z_2=z_2z_1.$$

2) Ассоциативность сложения и умножения:

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),\ \ (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3).$$

3) Дистрибутивность: $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

4) Существование нейтрального числа по сложению:

$$\exists 0=0+0\cdot i\in\mathbb{C}:\ z+0=z.$$

5) Существование противоположного числа:

$$\forall\, z=x+iy\in\mathbb{C}\ \exists -z=-x-iy\in\mathbb{C}:\quad z+(-z)=0\,.$$

6) Существование обратного числа:

$$\forall\, z\neq 0\ \ \exists\, z^{-1}\in\mathbb{C}:\ z\cdot z^{-1}=1,\ 1=1+0\cdot i\in\mathbb{C}\,.$$

Определение 14.3. ***Сопряжённым*** к комплексному числу $z=x+iy$ называется число $\bar{z}$, такое что $Re\,\bar{z}=Re\,z$, $Im\,\bar{z}=-Im\,z$:

$$\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy. \tag{14.4}$$

Пример 14.3. Вычислить $z\cdot\bar{z}$, если $z=1+3i\Rightarrow\bar{z}=1-3i$.

Решение. $z \cdot \overline{z} = (1+3i)\cdot(1-3i) = 1^2 - (3i)^2 = 1 + 9 = 10.$

Деление комплексных чисел

Определение 14.4. ***Частным*** $\frac{z_1}{z_2}$ от деления комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое удовлетворяет уравнению: $zz_2 = z_1$.

Для частного имеет место формула:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}. \tag{14.5}$$

Если $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \ \Rightarrow$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример 14.4. Найти частное комплексных чисел $z_1 = 6 - 5i$ и $z_2 = -2 + 3i$.

Решение.

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{6-5i}{-2+3i}=\frac{(6-5i\,)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)}=$$

$$=\frac{(-12-15)+i(10-18)}{4+9}=\frac{-27-8i}{13}=-\frac{27}{13}-i\,\frac{8}{13}\,.$$

Свойства операции сопряжения:

1) Сумма двух сопряженных комплексных чисел есть число действительное:

$$z+\overline{z}=(x+iy)+(x-iy)=\;2x=2Re\,z\;\;\Rightarrow(z+\overline{z})\in\mathbb{R}.$$

2) Разность двух сопряженных комплексных чисел есть число чисто мнимое:

$$z-\bar{z}=(x+iy)-(\,x-iy)=\;2yi=2i\cdot Im\,z$$

3) Произведение комплексно сопряжённых чисел есть число действительное: $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

$$\blacktriangleright z\cdot\overline{z}=(x+iy)\cdot(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2-i^2y^2=x^2+y^2=|z|^2\in\mathbb{R}\,.\blacktriangleleft$$

4) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\,.$

► Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \Rightarrow$

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = \underbrace{x_1 - iy_1}_{\overline{z_1}} + \underbrace{x_2 - iy_2}_{\overline{z_2}} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,. \blacktriangleleft$$

5) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

► Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow \overline{z_1} = x_1 - iy_1$, $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$.

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2) \Rightarrow$$

$$\overline{z_1 z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_2 y_1 + x_1 y_2).$$

С другой стороны:

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1 x_2 - i x_1 y_2 - i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,. \blacktriangleleft$$

6) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Доказать самостоятельно.

7) $\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = z_1 + z_2$.

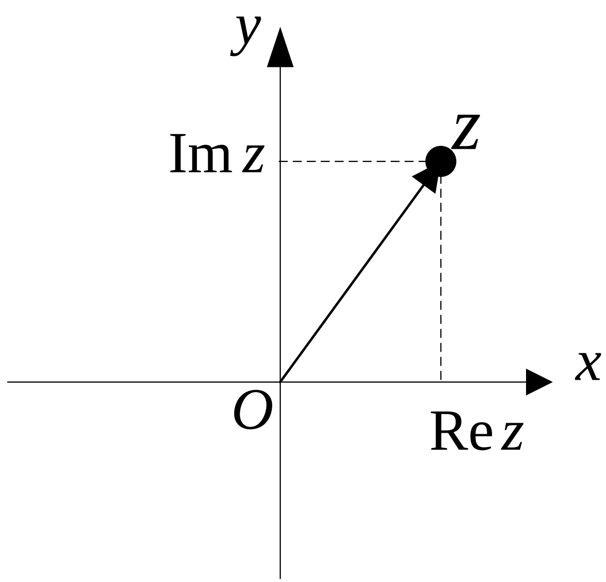
► Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow \overline{z_1} = x_1 - iy_1, \overline{z_2} = x_2 - iy_2$.

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$$

$$\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = z_1 + z_2.$$ ◄

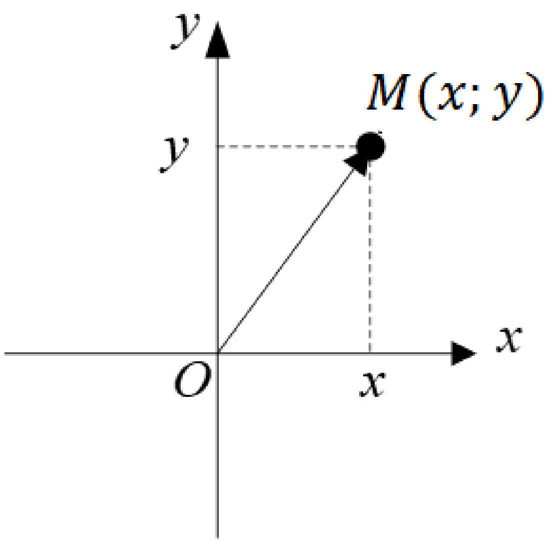
14.2. Геометрическое представление комплексного числа

Любое комплексное число $z = x + iy$ можно представить на плоскости Oxy точкой с координатами $(x; y)$. Так как $x = Re\, z$, а $y = Im\, z$, то ось Ox называют *действительной осью*, а ось Oy – *мнимой осью*. Плоскость Oxy называется *комплексной плоскостью*.



Если $Re\, z = 0$ (чисто мнимое число), то оно лежит на оси Oy. Если $Im\, z = 0$ (действительное число), то оно лежит на оси Ox.

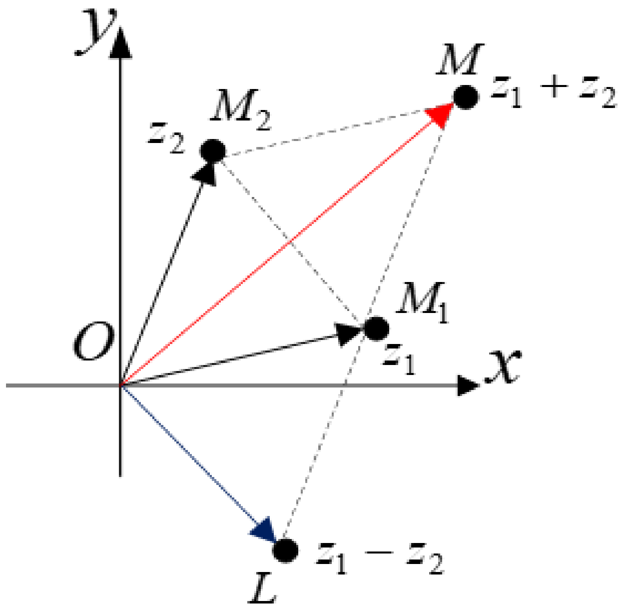
Число z можно также представить с помощью радиус-вектора $\overrightarrow{OM} = (x; y)$, выходящего из начала координат $O(0; 0)$ в точку M, определяющую число z на плоскости.



Длина радиус-вектора совпадает с модулем комплексного числа:

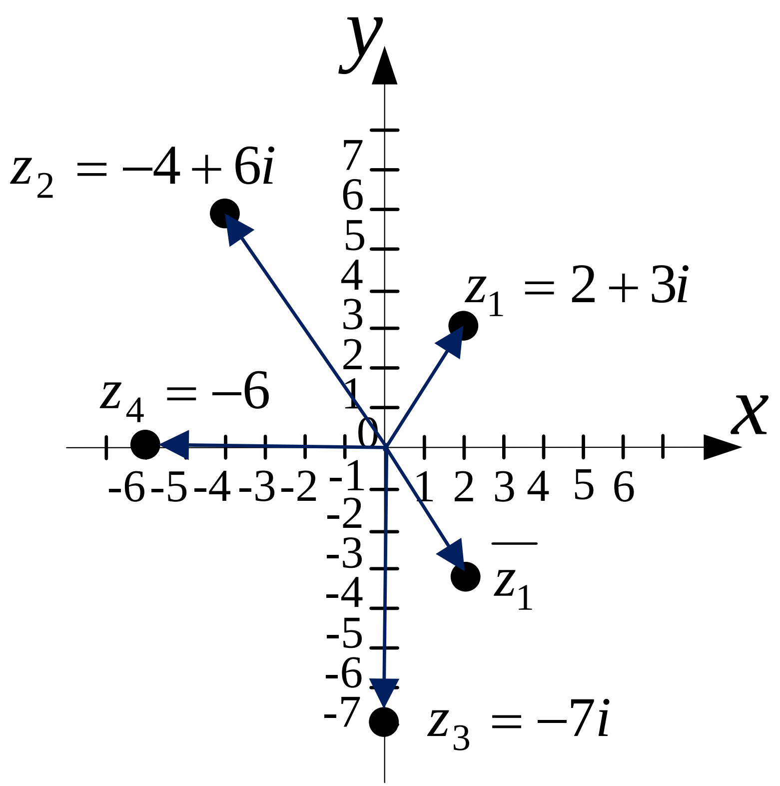
$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Замечание 14.1. Геометрически комплексные числа складываются и вычитаются как векторы.



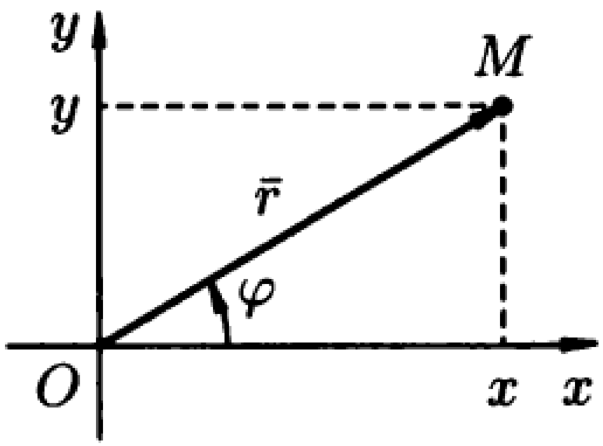
Пример 14.5. Изобразить на комплексной плоскости числа:

$$z_1 = 2 + 3i, \quad \overline{z_1}, \quad z_2 = -4 + 6i, \quad z_3 = -7i, \quad z_4 = -6.$$



14.3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости однозначно определяется не только декартовыми координатами x, y, но и полярными координатами r, φ, где r – расстояние от начала координат O до точки z, φ – угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором точки z.



Поворот против часовой стрелки определяет положительный угол, а поворот по часовой стрелке – отрицательный.

Расстояние от начала координат O до точки z называется ***модулем*** комплексного числа z:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол φ называется ***аргументом*** комплексного числа $z \neq 0$ и обозначается $\operatorname{Arg} z = \varphi$. $Arg\, z$ есть величина многозначная, определенная с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$\boxed{Arg\, z = arg\, z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \qquad (14.6)}$$

$arg\, z = \varphi$ – главное значение аргумента, определяемое условиями:

$$-\pi < arg\, z \leq \pi \text{ или } 0 \leq arg\, z < 2\pi .$$

Из рисунка видно, что декартовы координаты связаны с полярными соотношениями:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\varphi\,. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{14.7}$$

Следовательно, любое комплексное число $z \neq 0$, записанное в алгебраической форме $z = x + iy$, можно переписать в виде:

$$\boxed{z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{14.8}}$$

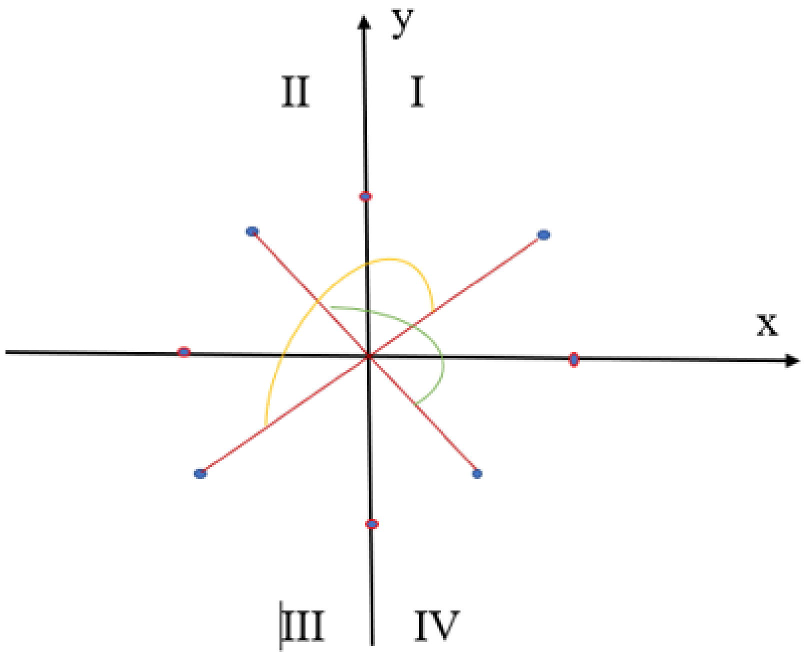
Равенство (14.8) – ***тригонометрическая форма*** записи комплексного числа z.

Чтобы представить комплексное число $z = x + iy$ в тригонометрической форме, необходимо:

1) изобразить на комплексной плоскости точку $(x; y)$ и отметить четверть, в которой расположен радиус-вектор этой точки;
2) вычислить модуль числа z: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
3) вычислить $arg\, z$.

Для определения $arg\, z = \varphi$ удобно воспользоваться следующей формулой:

$$arg\, z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, z \in I \text{ или } IV \text{ четверти} \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, z \in II \text{ или } III \text{ четверти} \\ \dfrac{\pi}{2}, \quad z \in Oy \text{ и } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, \quad z \in Oy \text{ и } y < 0 \\ \pi, \quad z \in Ox \text{ и } x < 0 \\ 0, \quad z \in Ox \text{ и } x > 0 \end{cases}$$



$$-\frac{\pi}{2} < arctg\, x < \frac{\pi}{2}, \quad arctg(-x) = -arctg\, x.$$

Таблица значений тригонометрических функций для основных углов первой и четвертой четверти тригонометрического круга:

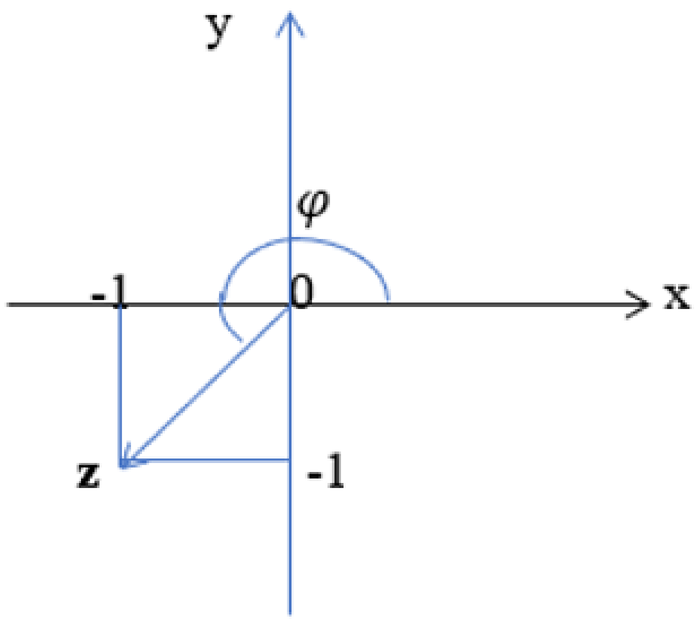
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\operatorname{tg}\varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	-1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$+\infty$	$-\infty$

Пример 14.6. Представить число $z=-1-i$ в тригонометрической форме.

Решение. $-1-i=(-1,-1)\in III$ четверти.

Модуль $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, $\varphi=argz=arctg\,1+\pi=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow$

$$z=\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4}+i\,sin\frac{5\pi}{4}\right).$$



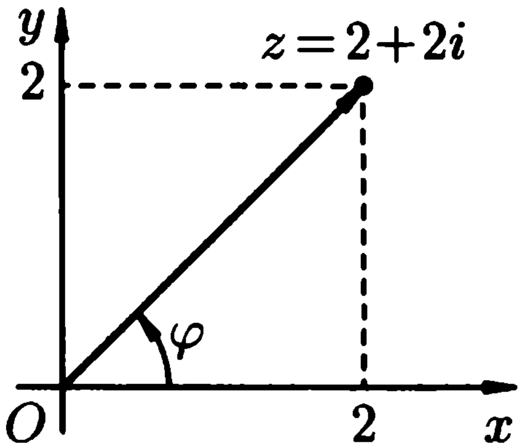
Пример 14.7. Представить в тригонометрической форме числа $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = -2 - 3i$, $z_4 = -5i$.

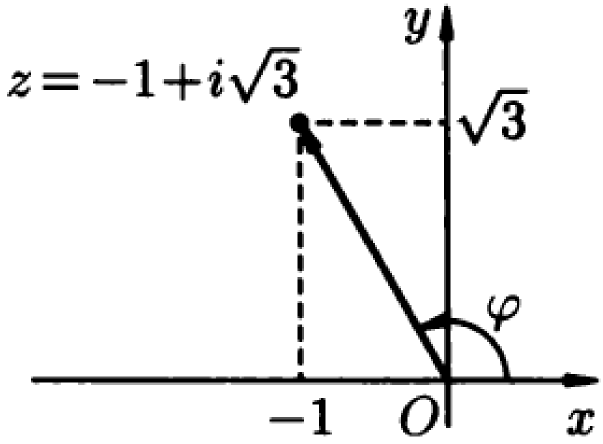
Решение. Определим модули данных чисел по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

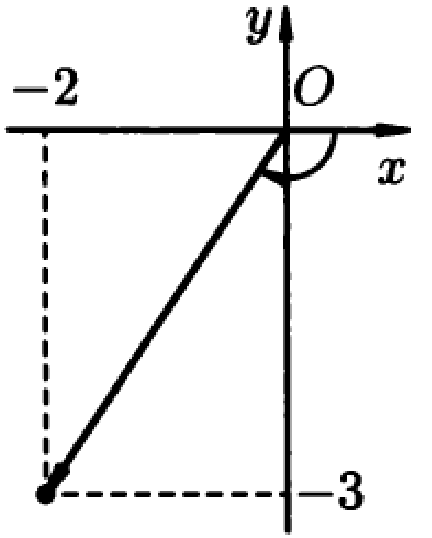
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},\ |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2,$$

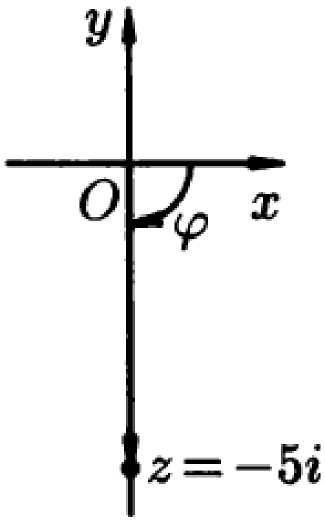
$$|z_3| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}, |z_4| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5.$$

Для того, чтобы найти аргументы, построим точки z_1, z_2, z_3, z_4 на комплексной плоскости.









$$arg z_1 = arctg\left(\frac{2}{2}\right) = arctg\ 1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$arg z_2 = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{2\pi}{3},$$

$$arg z_3 = arctg\left(\frac{-3}{-2}\right) + \pi = arctg\ \frac{3}{2} + \pi \Rightarrow \varphi_3 = arctg\ \frac{3}{2} + \pi,$$

$$arg z_4 = -\frac{\pi}{2}.$$

Запишем тригонометрические формы данных чисел:

$$z_1 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$z_3 = -2 - 3i = \sqrt{13}\left(\cos(arctg\ \frac{3}{2} + \pi) + i\sin(arctg\ \frac{3}{2} + \pi)\right),$$

$$z_4 = -5i = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Спасибо за внимание!