ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция № 12

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

- Кривые второго порядка на плоскости: эллипс, гипербола, парабола.
- Вывод уравнений кривых второго порядка исходя из их геометрических свойств.
- Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы по их каноническим уравнениям.

21 ноября 2023 г.

12.1. Кривые второго порядка на плоскости

Определение 12.1. ***Кривой второго порядка*** называется линия, определяемая в декартовых координатах уравнением второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (12.1)$$

Все коэффициенты уравнения (12.1) – действительные числа и по крайней мере, одно из чисел A, B или C не равно нулю, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

На самом деле, существует всего три "реальных" кривых второго порядка: **эллипс** (окружность — частный случаи эллипса), **гипербола** и **парабола**.

Каноническое уравнение окружности

Простейшей кривой второго порядка является окружность.

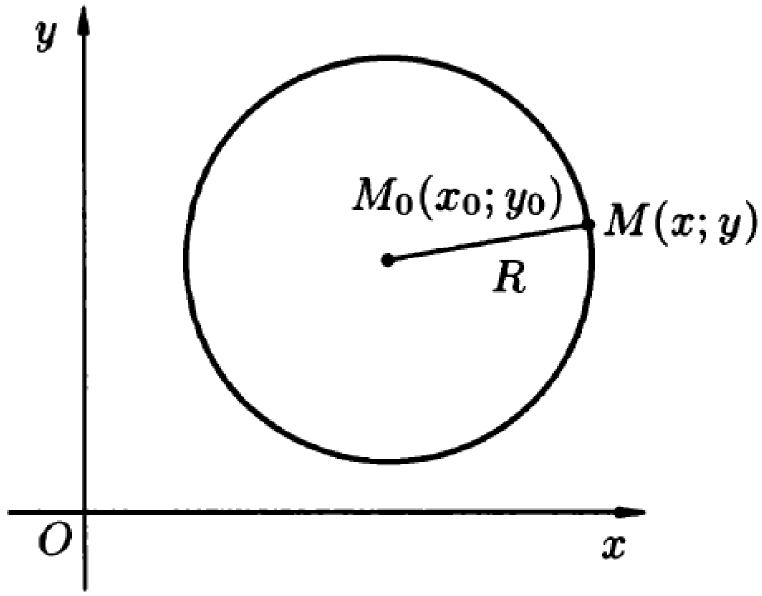
Определение 12.2. Окружностью называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки M_0 этой плоскости на одно и тоже расстояние R $(R > 0)$. Точка M_0 называется центром, а R – радиусом окружности.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ – центр, а $M(x; y)$ – произвольная точка окружности.

Тогда из условия $M_0M = R$ имеем уравнение: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R \Rightarrow$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (12.2)$$

Уравнению (12.2) удовлетворяют координаты любой точки $M(x; y)$ данной окружности и не удовлетворяют координаты точки, не лежащей на окружности. Уравнение (12.2) называется каноническим уравнением окружности.



Если $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, то получим уравнение окружности с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ можно записать в виде:

$$x^2 + y^2 - 2\,x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0.$$

Это уравнение вида (12.1). Таким образом окружность есть кривая второго порядка.

С другой стороны, можно показать, что уравнение вида (12.1):

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

в котором $A = C,\ B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

с помощью дополнения до полного квадрата каждой группы членов: $Ax^2 + 2Dx$ и $Cy^2 + 2Ey$, приводится к одному из трех видов:

1) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – окружность радиуса R, с центром в точке $(x_0; y_0)$;

2) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = -R^2$ – пустое множество точек («мнимая окружность»);

3) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ – единственная точка $(x_0; y_0)$.

Пример 12.1. Показать, что уравнение $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$ определяет окружность.

Решение.

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 = 5 \Leftrightarrow$$

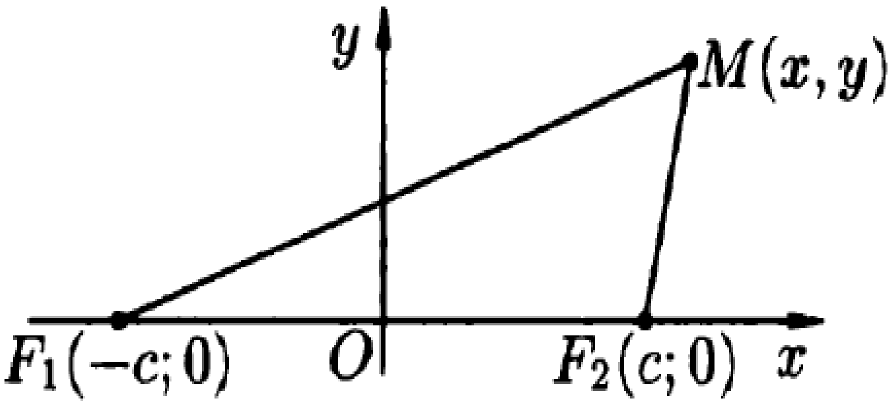
$$(x-1)^2+(y+3)^2=15.$$

Получили уравнение окружности с центром $M(1;-3)$ и радиусом $R=\sqrt{15}$.

12.2. Каноническое уравнение эллипса

Определение 12.3. ***Эллипсом*** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Пусть расстояние между фокусами F_1 и F_2 равно $2c$, а сумма расстояний до них от точек эллипса равно $2a$ $(2a>2c)$.



Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка эллипса, тогда по определению эллипса $MF_1 + MF_2 = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow a^4 - 2a^2cx + x^2c^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Обозначив $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, получаем: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ или

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (12.3)}$$

Уравнение (12.3) называется ***каноническим уравнением эллипса.*** Эллипс – кривая второго порядка.

Исследование формы эллипса по его уравнению

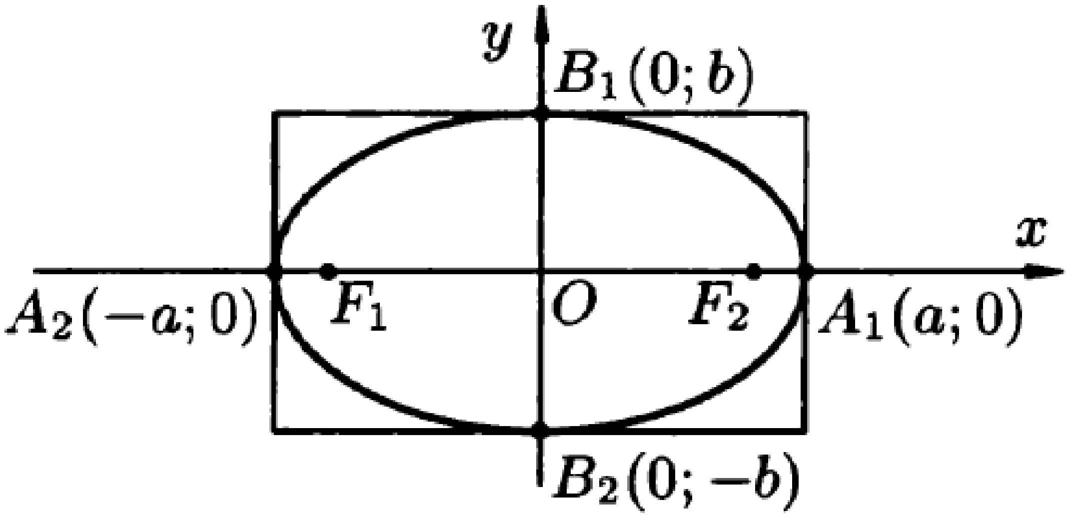
Установим форму эллипса по его каноническому уравнению.

1. Уравнение (12.3) содержит x и y только в четных степенях, поэтому если точка $(x;y)$ принадлежит эллипсу, то ему также принадлежат точки $(x;-y), (-x;y), (-x;-y)$. Отсюда следует, что координатные оси Ox и Oy являются осями симметрии эллипса, а начало координат O – его центром симметрии.

2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат.

Если $y = 0$, то получаем две точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, в которых ось Ox пересекает эллипс. Если в уравнение (12.3) подставим $x = 0$, то найдем точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$.

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются вершинами эллипса.



Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 и их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно большой и малой осями эллипса. Числа a и b – полуоси эллипса, a – большая полуось, b – малая полуось (так как $b = \sqrt{a^2 - c^2} < a$).

$$b^2 = a^2 - c^2 \ \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ – левый и правый фокусы эллипса, $2c$ – фокусное расстояние.

3. Из уравнения (12.3) следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит единицы, т. е. имеют место неравенства:

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2} \le 1 \text{ или } -a \le x \le a \text{ и } -b \le y \le b.$$

Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

4. Выразив y из уравнения (12.3), получаем:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\ |x| \le a.$$

Следовательно, эллипс состоит из двух симметричных половин:

$$\text{верхней } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ и нижней } y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

При $x = a$, $y = 0$ и при убывании x от a до 0 y – возрастает от 0 до b. Таким образом, эллипс имеет форму, овальной замкнутой кривой.

Форма эллипса зависит от отношения $\frac{b}{a}$. При $b = a$ эллипс превращается в окружность, уравнение эллипса (12.3) принимает вид: $x^2 + y^2 = a^2$.

В качестве характеристики формы эллипса чаще пользуются отношением:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$$

называемым эксцентриситетом эллипса (отношение фокусного расстояния 2с к большей оси $2a$). Так как $2a > 2c \Rightarrow 0 < \varepsilon < 1$.

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2.$$

Следовательно, чем меньше ε тем меньше его малая полуось b отличается от большой полуоси a, т.е. тем меньше эллипс вытянут вдоль фокальной оси Ox.
В пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем $a = b$ и эллипс переходит в окружность:

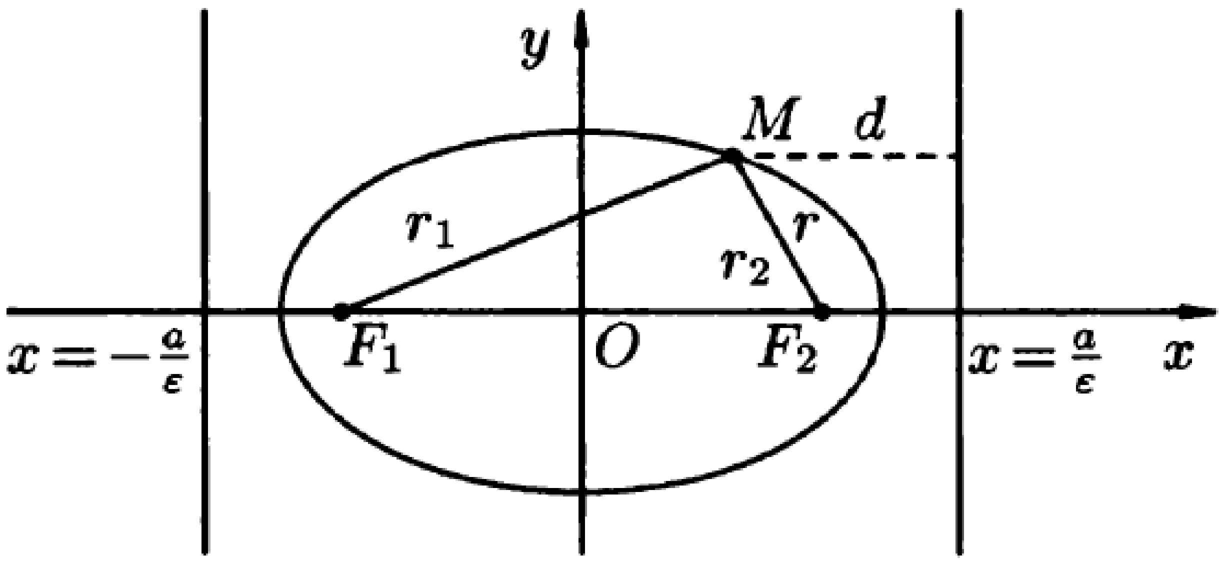
$x^2 + y^2 = a^2$ радиуса $R = a$. При этом фокусы совпадают и находятся в начале координат $F_1 = F_2 = O$ (так как $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0$).

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2. Длины отрезков $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ называются фокальными радиусами точки M. Из определения эллипса $r_1 + r_2 = 2a$.

Можно показать, что фокальные радиусы определяются формулами:

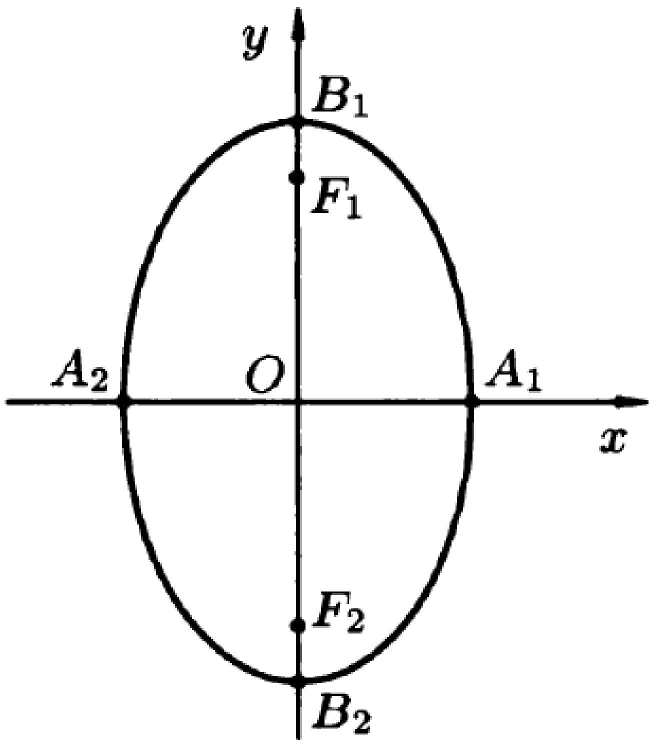
$$r_1 = a + \varepsilon x, r_2 = a - \varepsilon x.$$

Прямые вида: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами эллипса.



Директрисы параллельны малой оси эллипса и отстают от нее на расстоянии равном $\frac{a}{\varepsilon}$.

Теорема 12.1. Если r – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная ε – эксцентриситету эллипса.



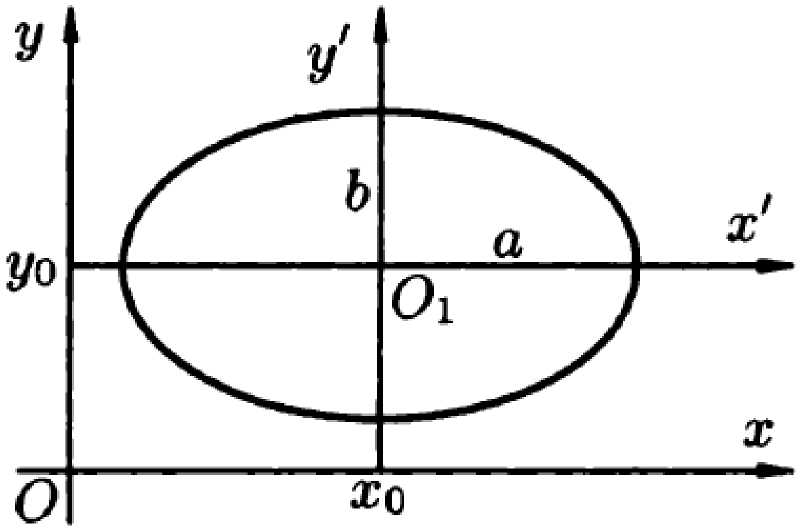
Если фокусы эллипса лежат на оси Oy, то $F_1(0;c)$ и $F_2(0;-c)$ и большая ось $2b$ лежит на оси Oy, а малая ось $2a$ лежит на оси $Ox, b > a$, $c = \sqrt{b^2 - a^2}, \varepsilon = \frac{c}{b}$ и уравнения директрис: $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

Можно вывести параметрические уравнения эллипса:

$$\begin{cases} x = a\cos t\,, \\ y = b\sin t\,. \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]. \qquad (12.4)$$

Если центр симметрии эллипса находится в точке $(x_0; y_0)$, то легко показать, что уравнение эллипса имеет вид:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (12.5)}$$

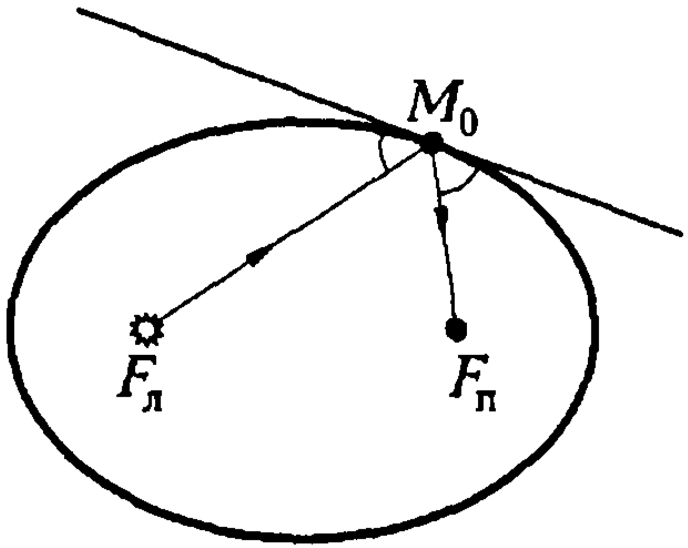


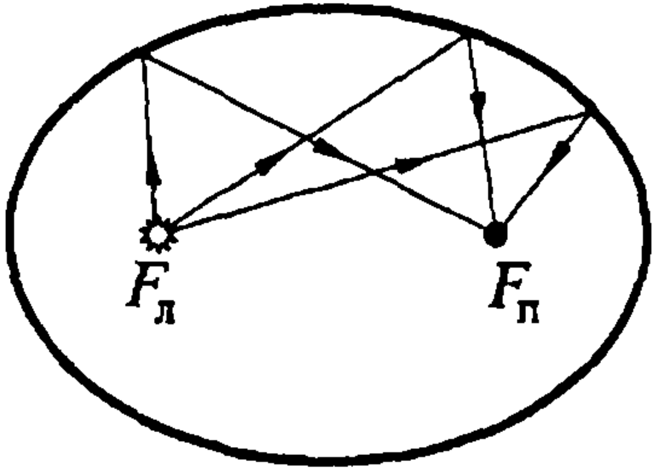
Это уравнение является каноническим уравнением эллипса относительно декартовых координат x' и y', связанных с x и y формулами:

$$x' = x - x_0 \ \text{ и } \ y' = y - y_0.$$

Оптическое свойство эллипса: касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.

Если поместить в один из фокусов эллипса с зеркальной «поверхностью» точечный источник света, то все лучи после отражения от «поверхности» эллипса сойдутся в другом его фокусе.





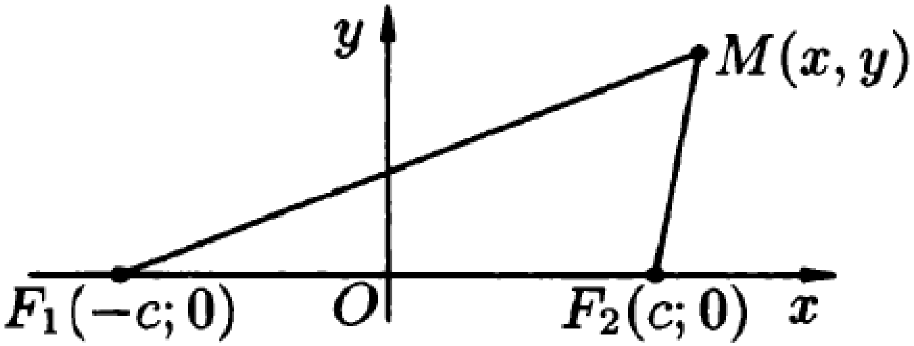
12.3. Каноническое уравнение гиперболы

Определение 12.4. ***Гиперболой*** называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Пусть расстояние между фокусами F_1 и F_2 равно $2c$, а модуль разности расстояний до них от точек гиперболы равен $2a \Rightarrow 0 < 2a < 2c$.

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка гиперболы. По определению гиперболы $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a.$$



После упрощений, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим равенство:

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Обозначив $b^2 = c^2 - a^2 > 0$, получаем: $-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$ или

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (12.6)}$$

Уравнение (12.6) называется каноническим уравнением гиперболы. Гипербола есть линия второго порядка.

Исследование формы гиперболы по ее уравнению

Установим форму гиперболы по ее каноническому уравнению.

1. Уравнение (12.6) содержит x и y только в четных степенях, следовательно, гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют центром гиперболы.

2. Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат.

Если $y=0$, то имеем две точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, в которых ось Ox пересекает гиперболу. Положив в уравнении (12.6) $x=0$, получаем $-\frac{y^2}{b^2}=1$, чего быть не может. Следовательно, гипербола ось Oy не пересекает.

Точки A_1, A_2 называются вершинами гиперболы, $2a$ – действительной осью, $2b$ – мнимой осью (a – действительная полуось, b – мнимая полуось).

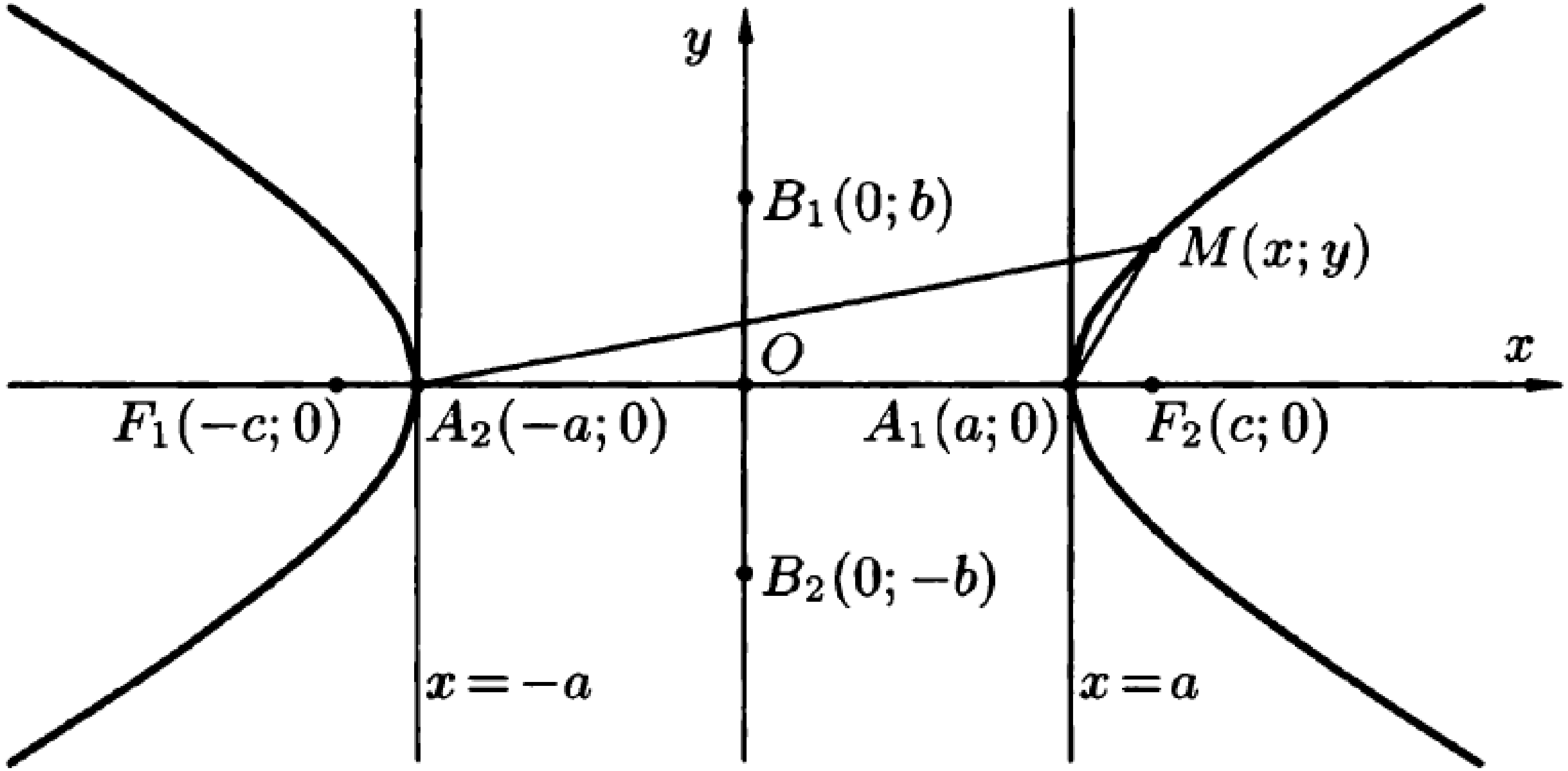
3. Из уравнения (12.6) следует, что $\frac{x^2}{a^2}\geq 1$ или $|x|\geq a$. Это означает, что точки гиперболы расположены справа от прямой $x=a$ (правая ветвь гиперболы) и слева от прямой $x=-a$ (левая ветвь гиперболы).

4. Выразив y из уравнения (12.6), получаем: $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $|x|\geq a$, это означает, что гипербола состоит из двух симметричных половин: верхней $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ и нижней $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

При неограниченном возрастании абсциссы точка гиперболы неограниченно приближается к прямой $y = \frac{b}{a}x$, которая называется асимптотой гиперболы.

Из симметрии вытекает, что у гиперболы две асимптоты:

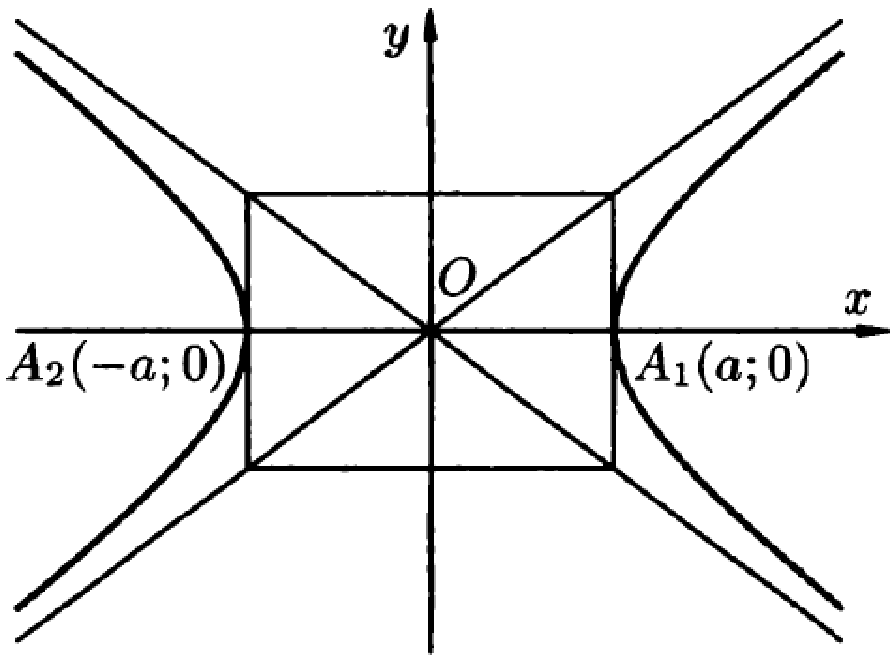
$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{и} \qquad y = -\frac{b}{a}x.$$



Прямоугольник, с центром в начале координат, со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осям, называется основным (асимптоты являются его диагоналями).

Эксцентриситетом гиперболы ε называется отношение расстояния между фокусами к величине действительной оси гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$



Так как $2a < 2c \Rightarrow \varepsilon > 1$. Эксцентриситет определяет форму гиперболы: чем меньше ε, тем более вытянут в направлении фокальной оси ее основной прямоугольник:

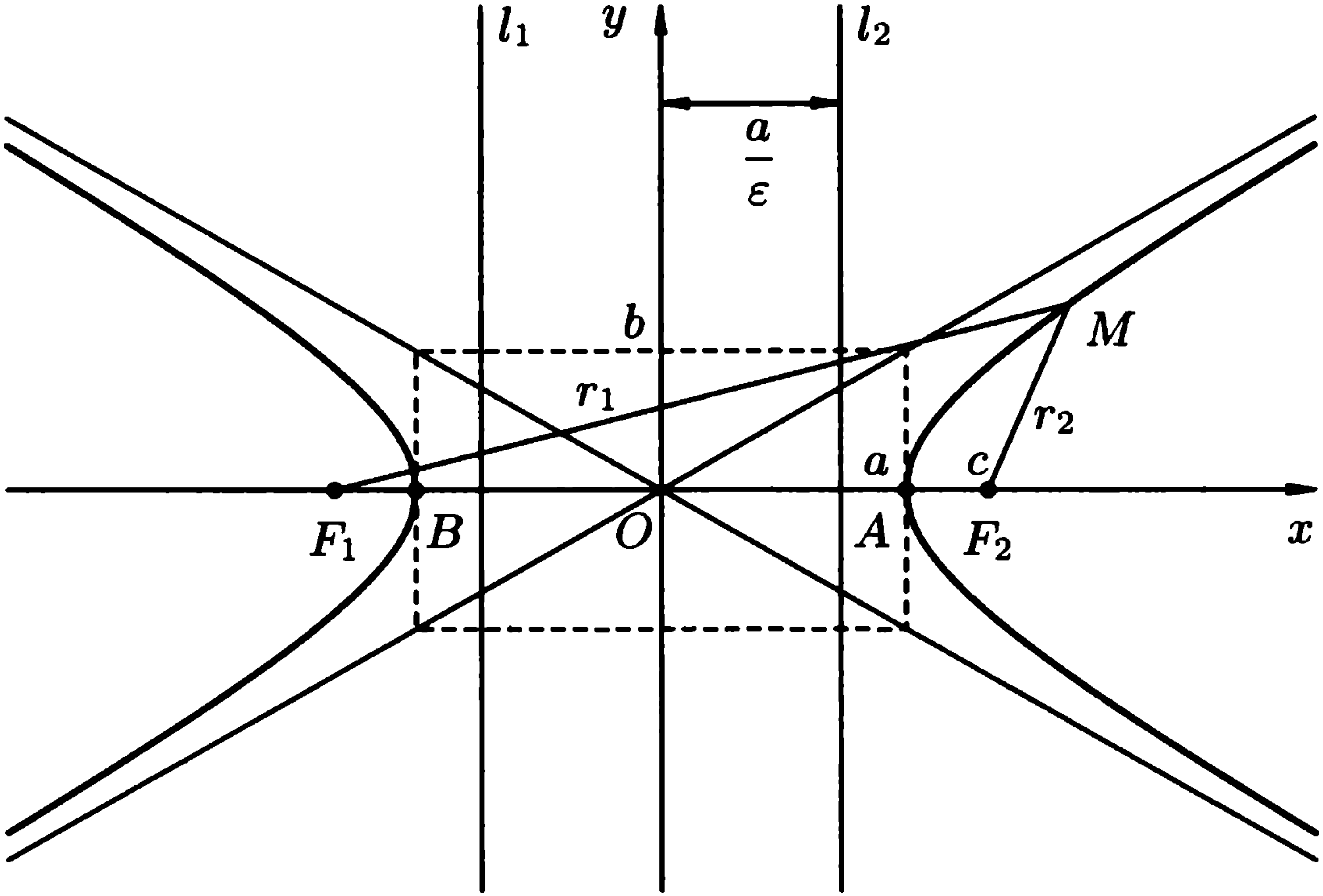
$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1 = \varepsilon^2 - 1.$$

Если $a = b$, то гипербола называется равносторонней: $x^2 - y^2 = a^2$, асимптоты: $y = x$ и $y = -x$, $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Фокальные радиусы гиперболы определяются формулами:

$r_1 = \varepsilon x + a$ и $r_2 = \varepsilon x - a$ для точек правой ветви гиперболы;

$r_1 = -\varepsilon x - a$ и $r_2 = -\varepsilon x + a$ для точек левой ветви.



Прямые l_1 и l_2: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами гиперболы. Правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы, левая – между центром и левой вершиной. Директрисы гиперболы имеют тоже свойство что и директрисы эллипса: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Теорема 12.2. Если r – расстояние от произвольной точки гиперболы до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету гиперболы ε.

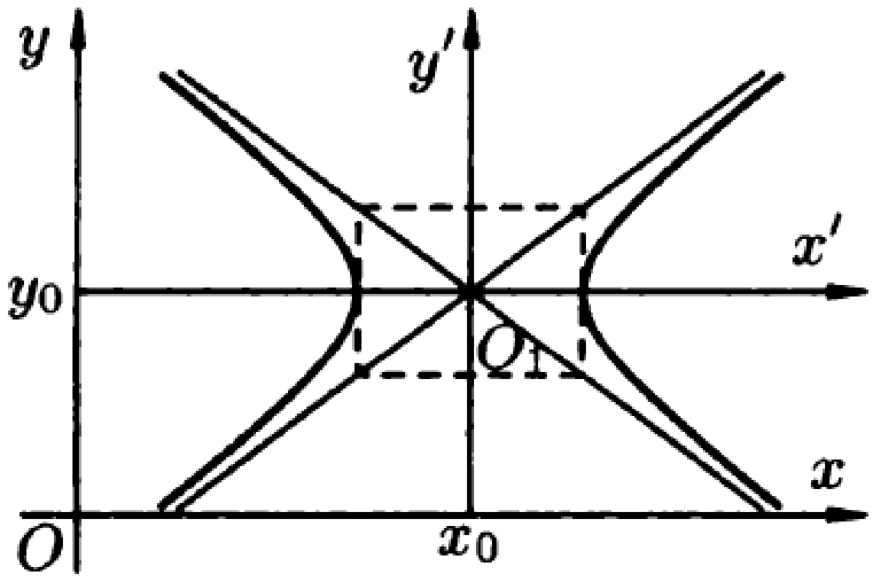
Если центр симметрии гиперболы находится в точке $(x_0; y_0)$, то ее уравнение имеет вид:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.}$$

Это уравнение является каноническим уравнением гиперболы относительно декартовых координат x' и y', связанных с x и y формулами:

$$x' = x - x_0 \quad \text{и} \quad y' = y - y_0.$$

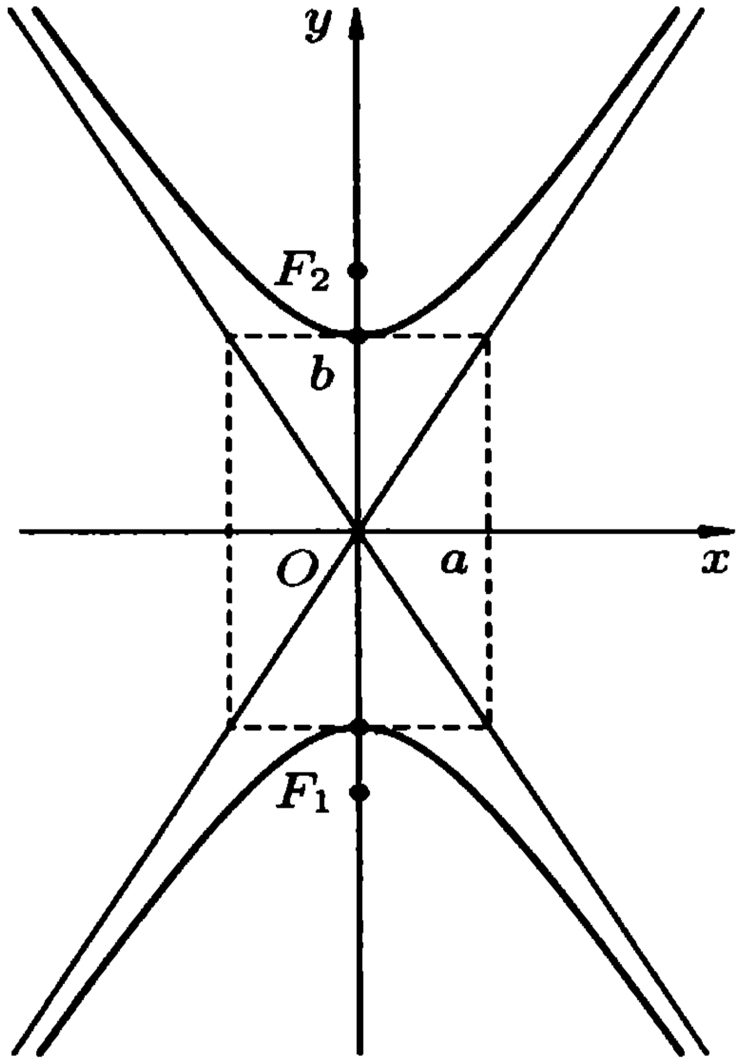
Уравнение асимптот такой гиперболы имеет вид: $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$.



Если фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то уравнение гиперболы имеет вид:

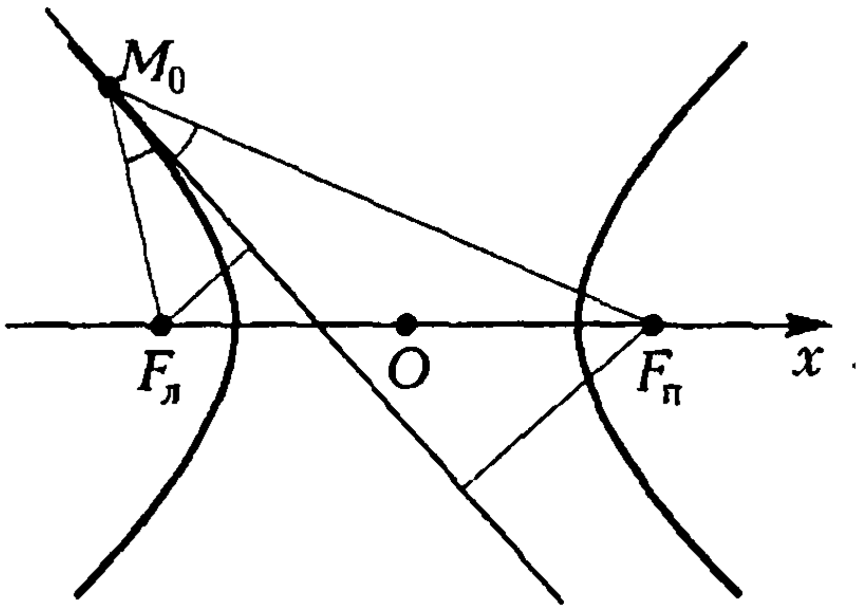
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \qquad (12.7)$$

Эксцентриситет этой гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{b}$, асимптоты определяются уравнениями: $y = \pm\frac{b}{a}x$, а уравнения директрис: $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

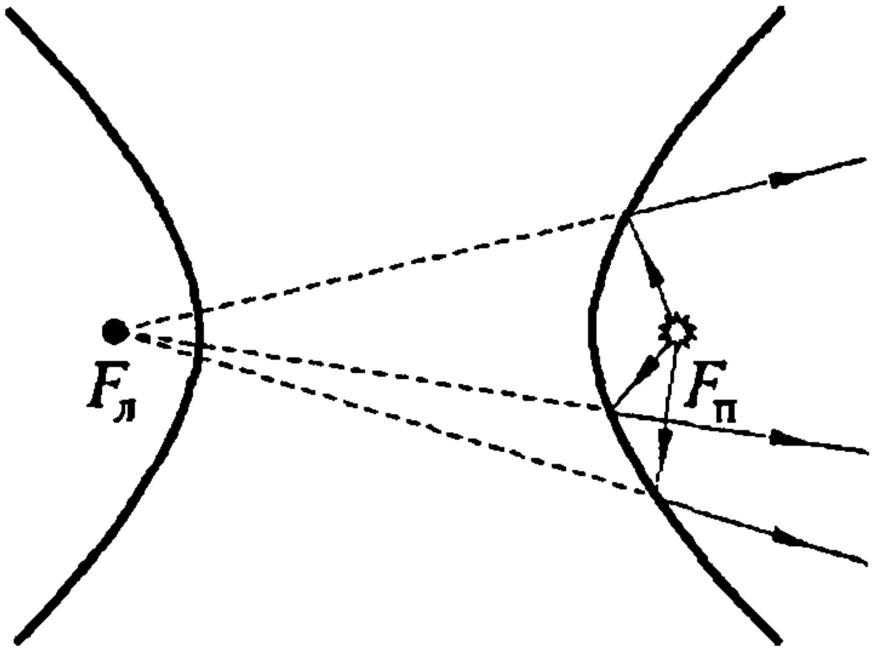


Гипербола (12.7) называется сопряженной гиперболе (12.6).

Оптическое свойство гиперболы: касательная к гиперболе образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.



Если поместить в один из фокусов гиперболы точечный источник света, то каждый луч после отражения от зеркальной «поверхности» гиперболы видится исходящим из другого фокуса.

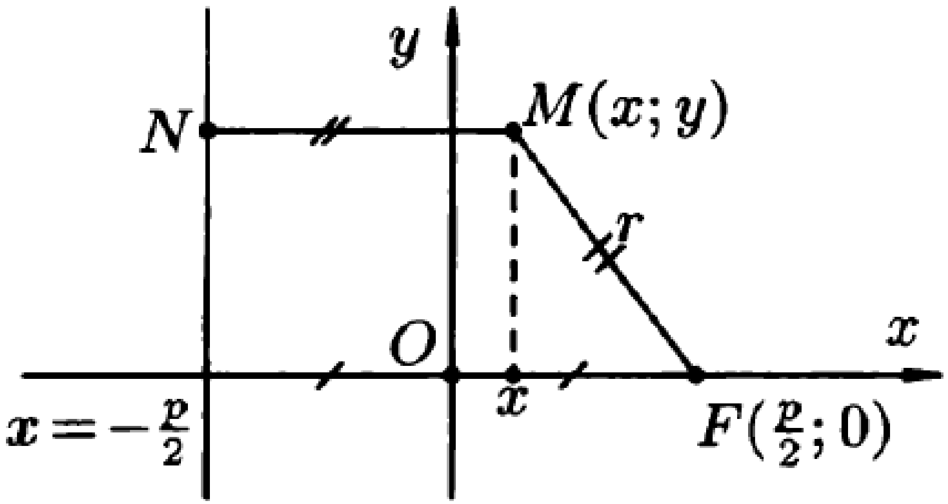


12.4. Каноническое уравнение параболы

Определение 12.5. ***Параболой*** называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Расстояние от фокуса F до директрисы называется параметром параболы и обозначается p $(p > 0)$.

Для вывода уравнения параболы выберем систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к F, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой.



Тогда координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид: $x = -\frac{p}{2}$.

По определению параболы: $MF = MN$. Так как $MN = x + \frac{p}{2}$, $MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, то получим равенство:

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \Rightarrow$$

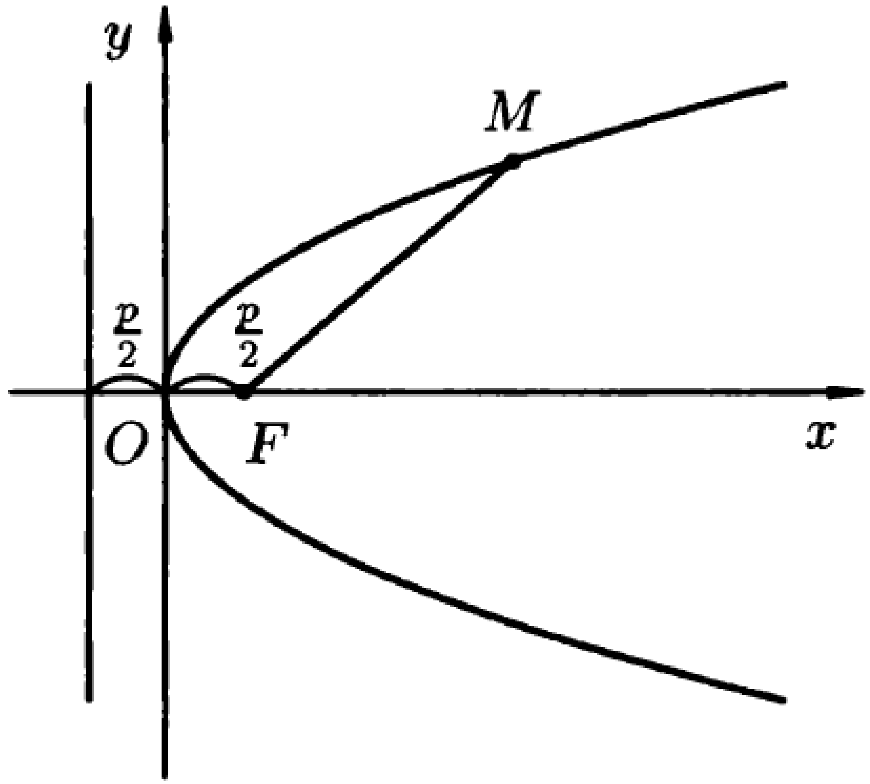
$$\boxed{y^2 = 2px\,. \qquad (12.8)}$$

Уравнение (12.8) называется каноническим уравнением параболы.

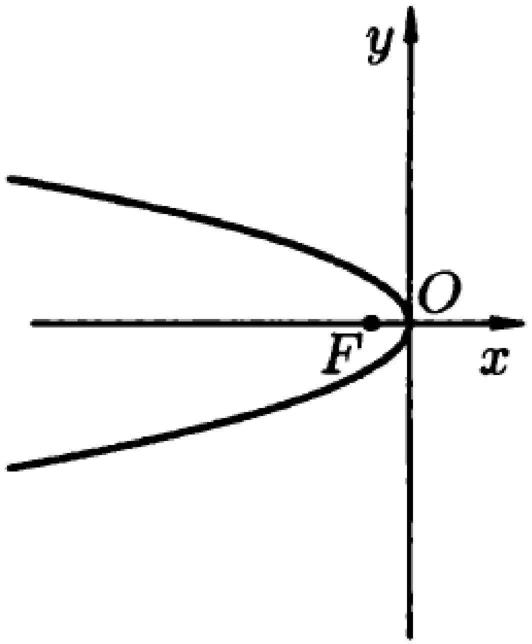
Исследование форм параболы по ее уравнению

1. В уравнении (12.8) переменная y входит в четной степени, значит парабола симметрична относительно оси Ox, ось Ox является осью симметрии параболы. Ось симметрии параболы называется фокальной осью.
2. Так как $p > 0$, то из (12.8) следует, что $x \geq 0$. Следовательно, парабола расположена справа от оси Oy.
3. При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат.
4. При неограниченном возрастании x модуль y также неограниченно возрастает.

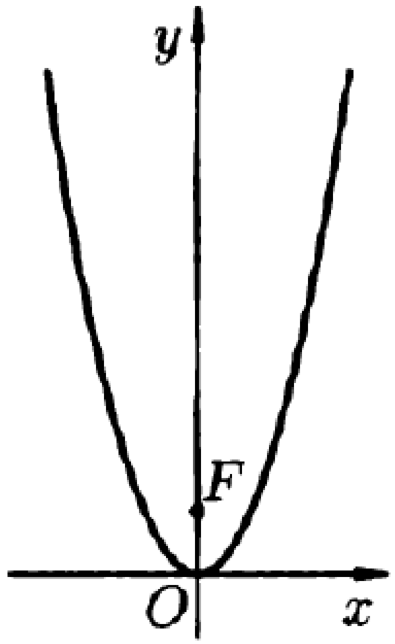
Точка $O(0;0)$ называется вершиной параболы, отрезок $FM = r$ называется фокальным радиусом точки M.



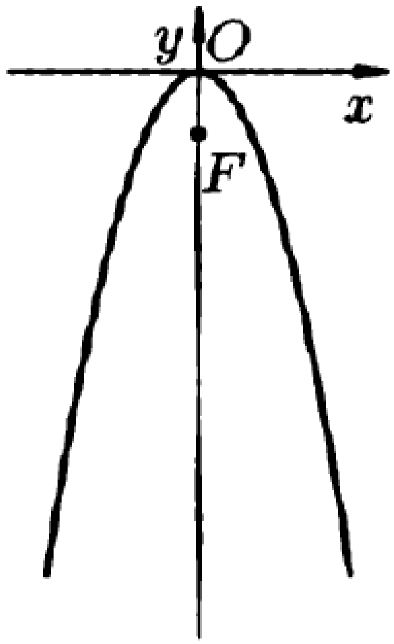
Уравнения: $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$, $(p > 0)$ также определяют параболы:



$y^2 = -2px$



$x^2 = 2py$

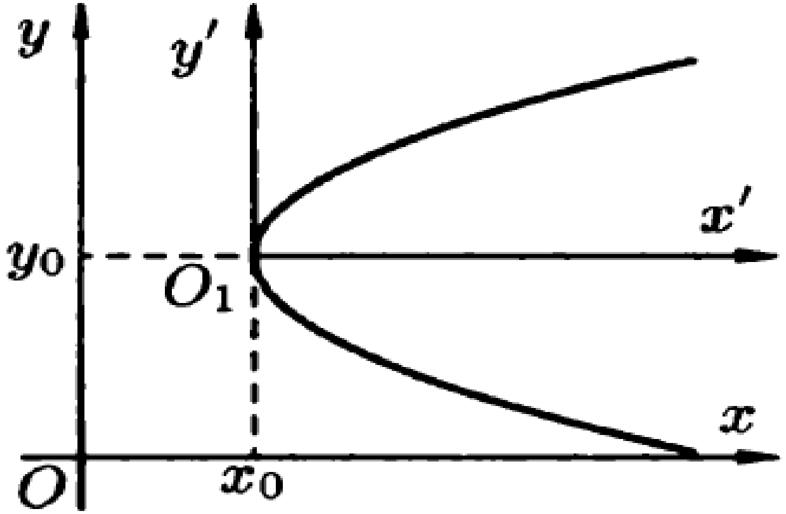


$x^2 = -2py$

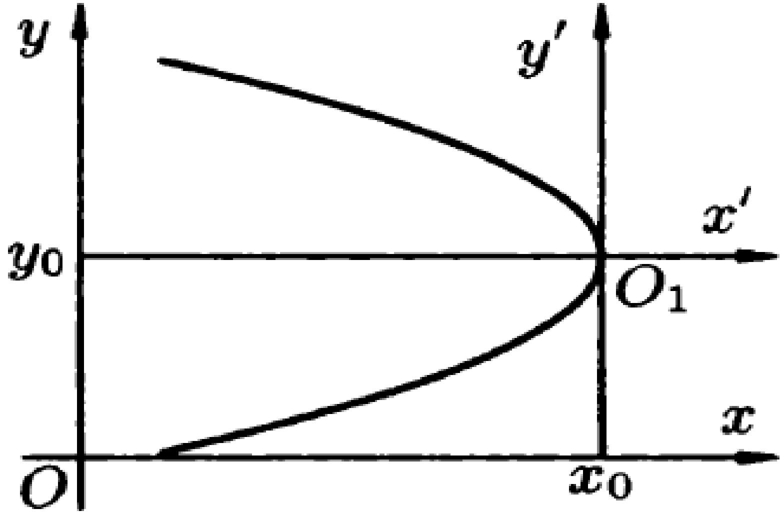
Если вершина параболы находится в точке $(x_0; y_0)$, то уравнение параболы имеет один из видов: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$, $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$.

Эти уравнения являются каноническими уравнениями параболы относительно декартовых координат x' и y', связанных с x и y формулами:

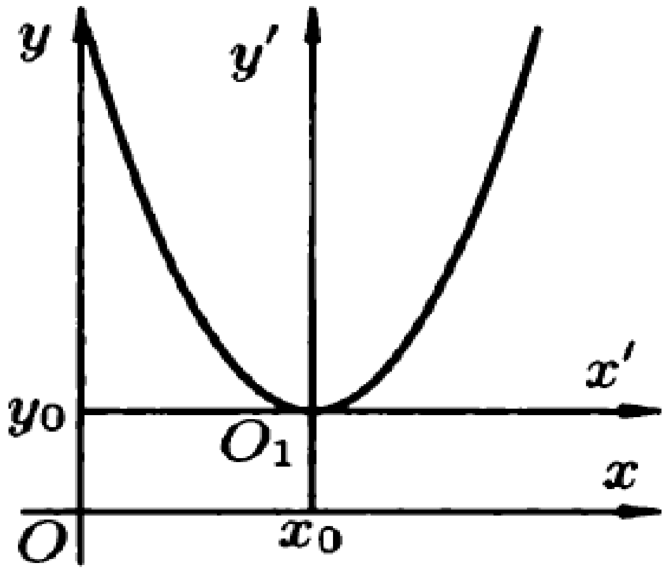
$$x' = x - x_0 \ \text{ и } \ y' = y - y_0.$$



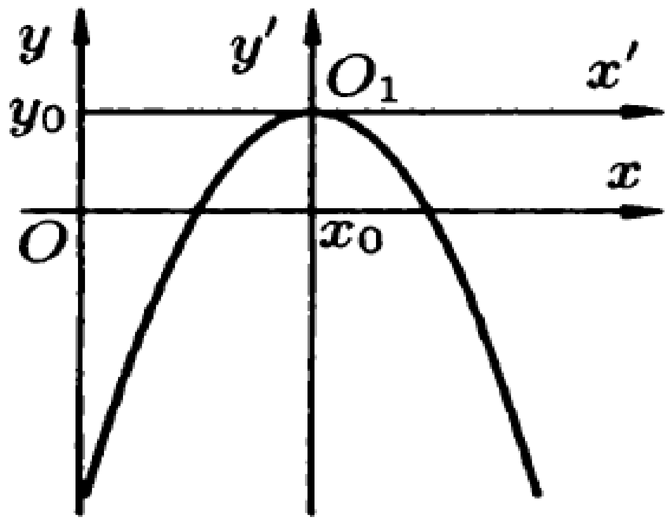
$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$



$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$



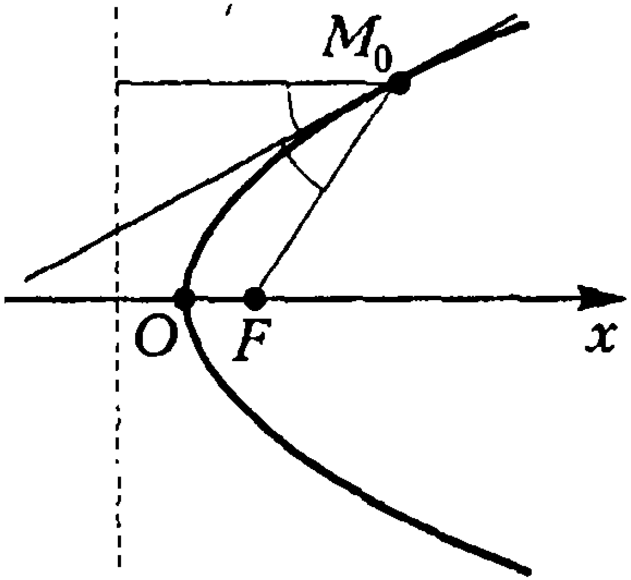
$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

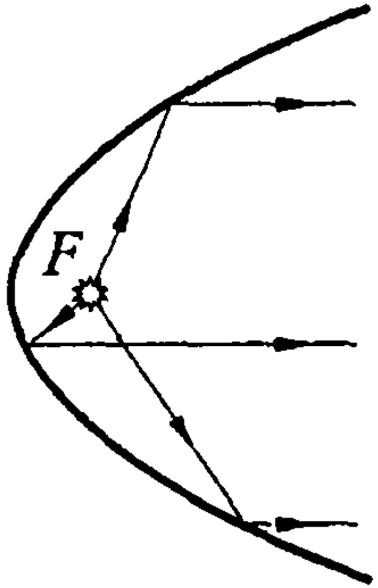


$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

Оптическое свойство параболы

Если в фокус параболы помещен точечный источник света, то все лучи, отраженные от зеркальной «поверхности» параболы, будут направлены параллельно оси параболы.





Пример 12.2. Найти фокус, директрису, фокальную ось для параболы $y = 4x^2$.

Решение. Осью симметрии параболы $y = x^2$ является ось Oy, а вершиной – точка O, поэтому фокальной осью будет ось Oy, вершиной – начало координат.

Найдем параметр данной параболы: $y = 4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}y \Rightarrow 2p = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{8}$.

Следовательно, фокус имеет координаты $F\left(0; \frac{1}{16}\right)$, уравнение директрисы:

$$y = -\frac{1}{16}.$$

12.5. Приведение общего уравнения второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим общее уравнение кривой второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Теорема 12.3. Уравнение второго порядка всегда определяет: либо окружность (при $A = C$), либо эллипс (при $A \cdot C > 0$), либо гиперболу (при $A \cdot C < 0$), либо параболу (при $A \cdot C = 0$). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) – в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы

– в пару пересекающихся прямых ($xy = 0$), для параболы – в пару параллельных прямых ($(x \pm y)^2 = R^2$).

Пусть $2B = 0$, тогда уравнение примет вид:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{12.9}$$

Для приведения (12.9) к каноническому виду, необходимо дополнить члены, содержащие x и y, до полных квадратов.

Пример 12.3. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$x^2 - 2y^2 + 2x + 12y - 33 = 0$$

и сделать чертеж.

Решение. Выделим полный квадрат по x и y:

$$x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1,$$

$$-2y^2 + 12y = -2(y^2 - 6y) = -2(y^2 - 6y + 9 - 9) = -2(y-3)^2 + 18\,.$$

Данное уравнение теперь можно переписать так:

$$(x+1)^2 - 2(y-3)^2 - 1 + 18 - 33 = 0 \Rightarrow$$

$$(x+1)^2 - 2(y-3)^2 = 16 \Rightarrow$$

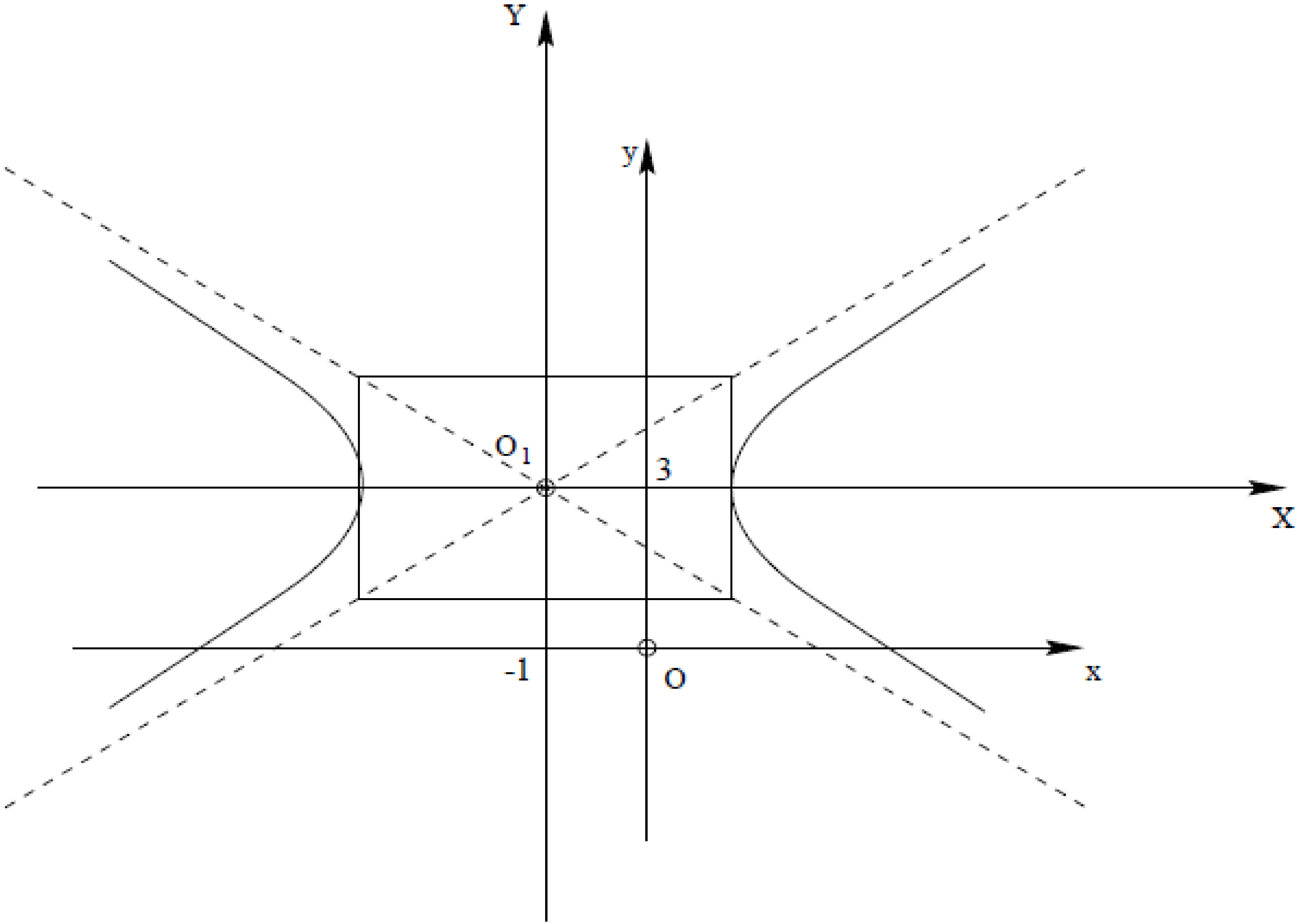
$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{8} = 1\ .$$

Это уравнение является каноническим уравнением гиперболы относительно декартовых координат x' и y', связанных с x и y формулами:

$$x' = x + 1,\ y' = y - 3.$$

Таким образом, центр симметрии данной гиперболы находится в точке $O_1(-1; 3)$, полуоси: $a = 4$ и $b = 2\sqrt{2}$.

Уравнение асимптот гиперболы: $y = 3 \pm \frac{2\sqrt{2}}{4}(x+1)$.


Y
y
O1
3
X
-1
O
x

Задачи для самостоятельного решения

1.* Вывести уравнение эллипса, фокусы которого расположены в мнимых вершинах гиперболы: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$, а большая полуось равна половине фокального расстояния этой гиперболы. Изобразить в одной системе координат данную гиперболу и эллипс с найденным уравнением.

2.* Вывести уравнение равносторонней гиперболы, симметричной относительно оси Ox, фокусы которой располагаются на директрисе параболы $y^2 = 4x$, а мнимая полуось равна параметру этой параболы. Изобразить данную параболу и полученную гиперболу на одном чертеже. Имеют ли данные кривые точки пересечения?

3.* Привести уравнение гиперболы $9x^2 - 16y^2 = -1$ к каноническому виду, найти координаты её фокусов и вершин, эксцентриситет и уравнения асимптот. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в фокусе гиперболы, а директриса проходит через действительную вершину. Рассмотреть все возможные случаи. Сделать чертёж: изобразить гиперболу и все параболы в одной системе координат.

Спасибо за внимание!