ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент
e-mail: gorshunova@mirea.ru

РТУ МИРЭА
Кафедра ВМ-3

Горшунова Т.А.

Лекция № 11

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

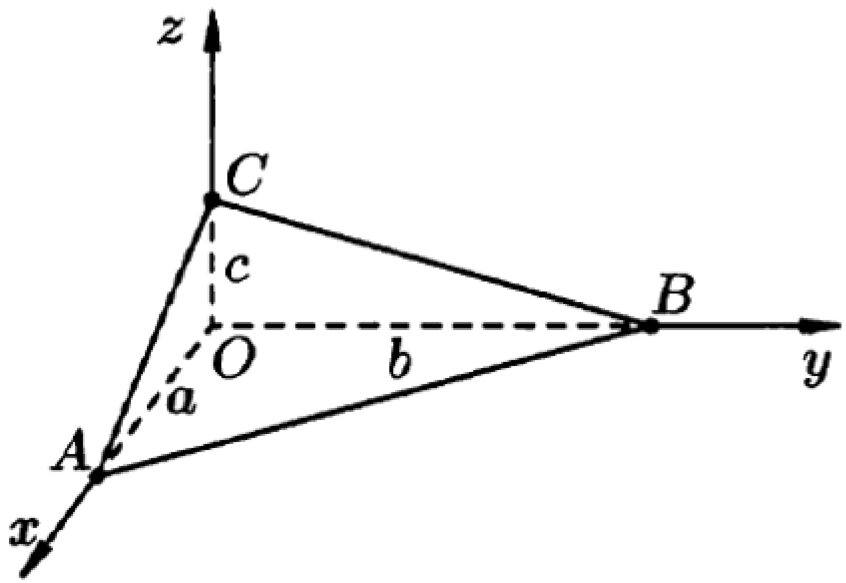
ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

- Уравнение плоскости в отрезках
- Угол между плоскостями. Взаимное расположение двух плоскостей
- Нормальное уравнение плоскости
- Прямая как линия пересечения плоскостей
- Параметрические и канонические уравнения прямой
- Уравнение прямой, проходящей через две различные точки
- Угол между прямыми. Взаимное расположение двух прямых
- Угол между прямой и плоскостью. Пересечение прямой и плоскости
- Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

14 ноября 2023 г.

11.1 Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b и c, т.е. проходит через три точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$.



Подставим координаты точек в уравнение (10.8):

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим:

$$bcx + acy + abz = abc \Rightarrow$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{11.1}$$

(11.1) – уравнение плоскости в отрезках.

Если уравнение плоскости задано в общем виде: $Ax+By+Cz+D=0$ и коэффициент $D\neq 0$, то его можно записать в виде (11.1).

$$Ax+By+Cz=-D\Rightarrow$$

$$\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1\Rightarrow$$

$$\frac{1}{{-D}/{A}}x+\frac{1}{{-D}/{B}}y+\frac{1}{{-D}/{C}}z=1.$$

Числа $\left|{-D}/{A}\right|$, $\left|{-D}/{B}\right|$, $\left|{-D}/{C}\right|$ есть длины отрезков, отсекаемых плоскостью от координатных осей.

Таким образом, плоскость пересекает ось Ox в точке $\left({-D}/{A};0;0\right)$, ось Oy в точке $\left(0;{-D}/{B};0\right)$, ось Oz в точке $\left(0;0;{-D}/{C}\right)$.

Пример 11.1. Найти объем треугольной пирамиды, отсекаемой плоскостью, проходящей через точки $A(3;-6;2)$, $B(-3;6;2)$ и $C(5;-1;4)$, от координатного угла.

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через три точки по формуле:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0.$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+6 & z-2 \\ -3-3 & 6+6 & 2-2 \\ 5-3 & -1+6 & 4-2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y+6 & z-2 \\ -6 & 12 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$(x-3)\begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}-(y+6)\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} -6 & 12 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$24(x-3)+12(y+6)-54(z-2)=0 \Rightarrow$$

$$4(x-3)+2(y+6)-9(z-2)=0 \Rightarrow$$

$$4x + 2y - 9z + 18 = 0.$$

Запишем уравнение плоскости в отрезках:

$$4x + 2y - 9z + 18 = 0 \Rightarrow \ 4x + 2y - 9z = -18 \Rightarrow$$

$$\frac{4x}{-18} + \frac{2y}{-18} - \frac{9z}{-18} = 1 \Rightarrow$$

$\frac{x}{-4{,}5} + \frac{y}{-9} + \frac{z}{2} = 1$ – уравнение плоскости в отрезках.

Следовательно, плоскость пересекает оси Ox, Oy и Oz в точках $M(-4{,}5; 0; 0)$, $N(0; -9; 0)$ и $P(0; 0; 2)$.

Объем треугольной пирамиды $OMNP$ равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда с ребрами OM, ON и OP:

$$V_{OMNP} = \frac{1}{6} \cdot OM \cdot ON \cdot OP = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{2} \cdot 9 \cdot 2 = \frac{81}{6} = 13{,}5.$$

Ответ: 13,5.

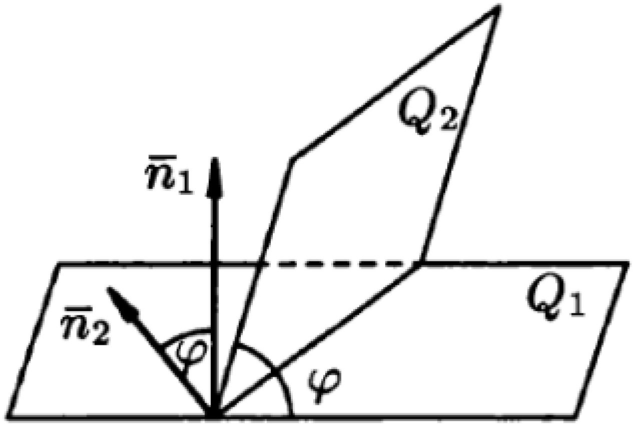
11.2.Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости

Двугранный угол между двумя плоскостями равен углу между их векторами нормали.

Пусть даны две плоскости:

$$Q_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } Q_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

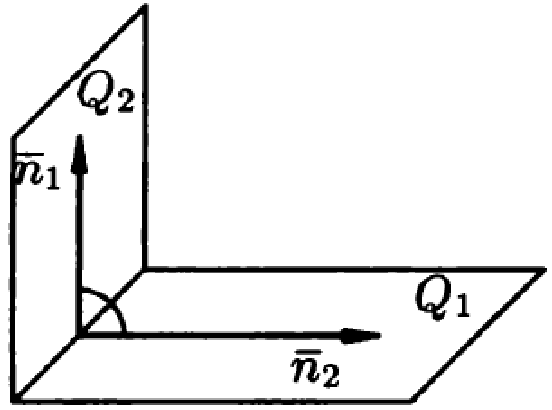
Тогда $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1) \perp Q_1$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2) \perp Q_2$:



Следовательно, острый угол между плоскостями Q_1 и Q_2 найдем по формуле:

$$cos\,\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (11.2)$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей

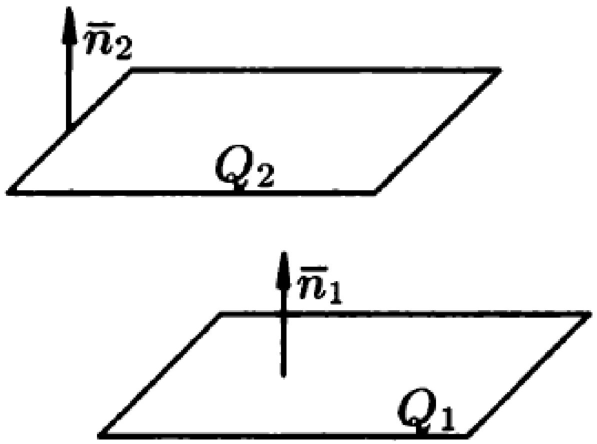


Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их векторы нормали перпендикулярны.

Таким образом, необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух плоскостей является условие:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (11.3)$$

Условие параллельности двух плоскостей



Две плоскости будут параллельны тогда и только тогда, когда их векторы нормали коллинеарны и плоскости не совпадают.

Таким образом, необходимым и достаточным условием параллельности двух плоскостей является условие:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \qquad (11.4)$$

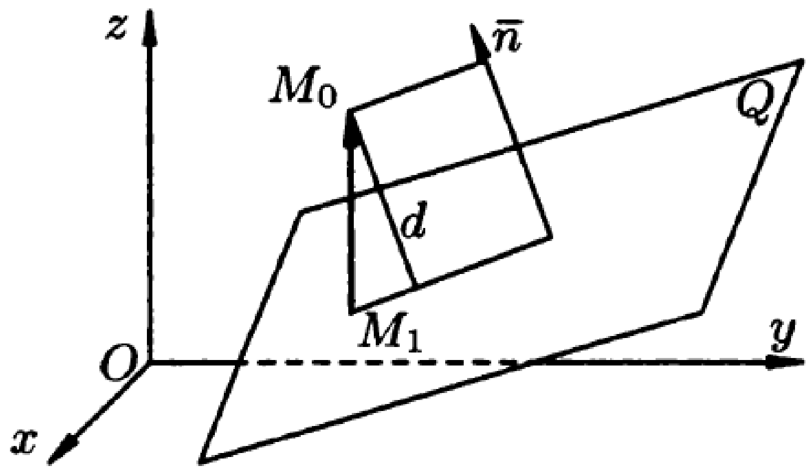
Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость Q: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Тогда $\vec{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости Q.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка плоскости.

Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормали $\vec{n} = (A; B; C)$:



$$d = \left|\text{Пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0}\right| = \left|\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}}{|\vec{n}|}\right| =$$

$$= \left|\frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

Так как точка $M_1 \in Q$, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ и $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$.

Тогда имеем:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (11.5)$$

В векторной форме формула расстояния от точки до плоскости имеет вид:

$$d = \frac{|\vec{r}_0 \cdot \vec{n} + D|}{|\vec{n}|}.$$

Расстояние между двумя параллельными плоскостями

Пусть даны две параллельные плоскости:

$$Q_1: \quad Ax + By + Cz + D_1 = 0,$$
$$Q_2: \quad Ax + By + Cz + D_2 = 0.$$

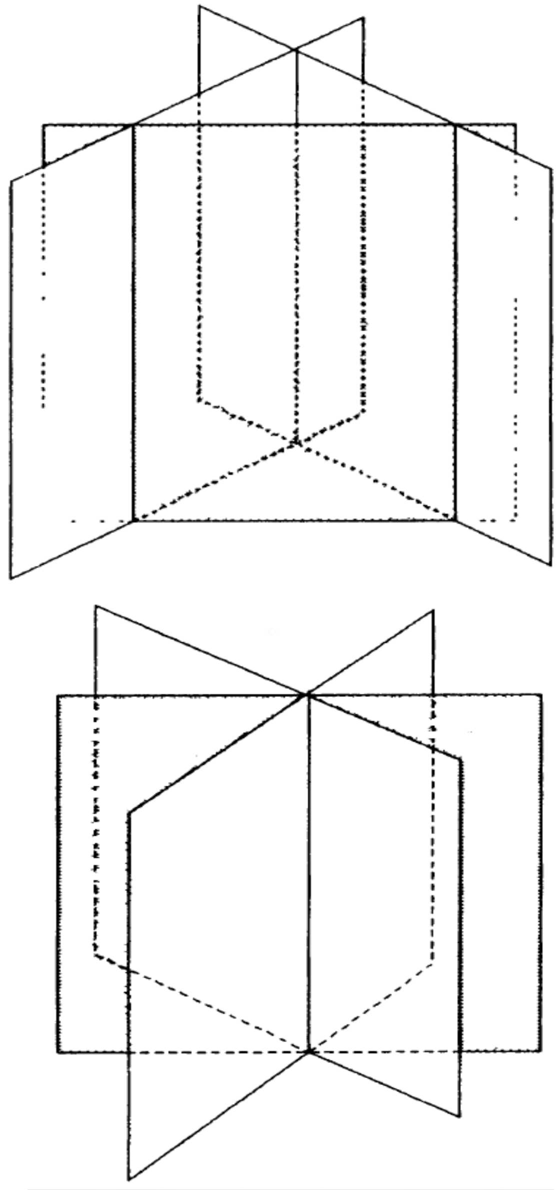
Расстояние между плоскостями может быть найдено по формуле:

$$d(Q_1; Q_2) = \left| \frac{D_2 - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \qquad (11.6)$$

Взаимное расположение трёх плоскостей

Три плоскости либо пересекаются в одной точке, либо параллельны одной прямой, в частности, проходят через прямую. Исследование взаимного расположение трёх плоскостей равносильно исследованию совместности неоднородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$



В частности, если определитель этой системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, а значит, три плоскости пересекаются в одной точке, координаты которой и есть решение этой системы.

Пример 11.2. Исследовать взаимное расположение двух плоскостей Q_1 и Q_2. Если они пересекаются, найти угол межу ними.

$$Q_1:\ \ 2x - y - z + 2 = 0,\ Q_2:\ \ x - 4z - 3 = 0.$$

Решение. Рассмотрим векторы нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$\vec{n}_1 = (2; -1; -1), \vec{n}_2 = (1; 0; -4) \Rightarrow \vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \Rightarrow$ плоскости пересекаются.

Найдем острый угол между плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{|(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|2+0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-4)^2}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{17}} = \frac{6}{\sqrt{102}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{6}{\sqrt{102}}.$$

11.3. Нормальное уравнение плоскости

Пусть уравнение плоскости задано в общем виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Тогда вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ –вектор нормали плоскости и его длина:

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Разделим обе части общего уравнения на $|\vec{n}|$:

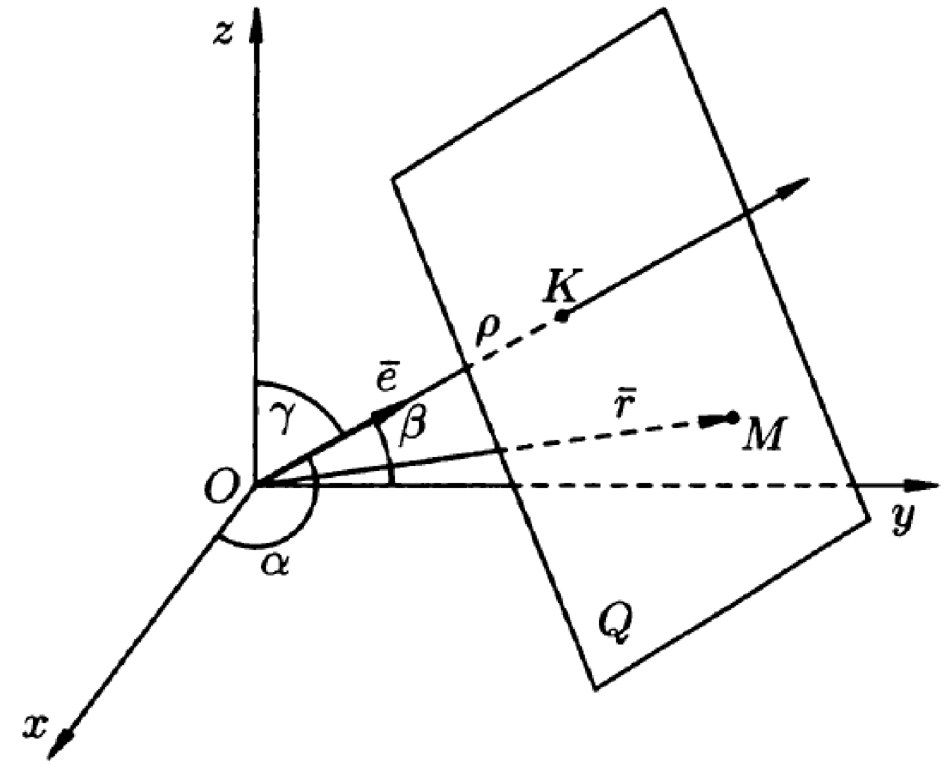
$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

Коэффициенты при переменных x, y, z являются координатами единичного вектора, сонаправленного с вектором нормали $\vec{n}$, т.е. это орт вектора нормали, а его координатами являются направляющие косинусы:

$$\vec{e}_{\vec{n}}=\left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right\}=\{\cos\alpha\,;\cos\beta\,;\cos\gamma\}.$$

$$cos^2\,\alpha+cos^2\,\beta+cos^2\,\gamma=1.$$

Свободный коэффициент $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ с точностью до знака есть расстояние от начала координат $\mathrm{O}(0;0;0)$ до данной плоскости: $d=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\rho$.



Для того, чтобы получить нормальное уравнение плоскости, достаточно умножить общее уравнение на нормирующий множитель:

$$\mu = \frac{\pm 1}{|\vec{n}|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Знак множителя μ надо брать противоположным знаку свободного члена D.

$$\boxed{x \cdot cos\,\alpha + y \cdot cos\,\beta + z \cdot cos\,\gamma - \rho = 0 \qquad (11.7)}$$

Уравнение (11.7) – нормальное уравнение плоскости.

Пример 11.3. Привести общее уравнение плоскости $x + 2y - 2z - 21 = 0$ к нормальному виду. Найти расстояние от начала координат до этой плоскости.

Решение. Найдем нормирующий множитель $\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $D = -21 \Rightarrow$

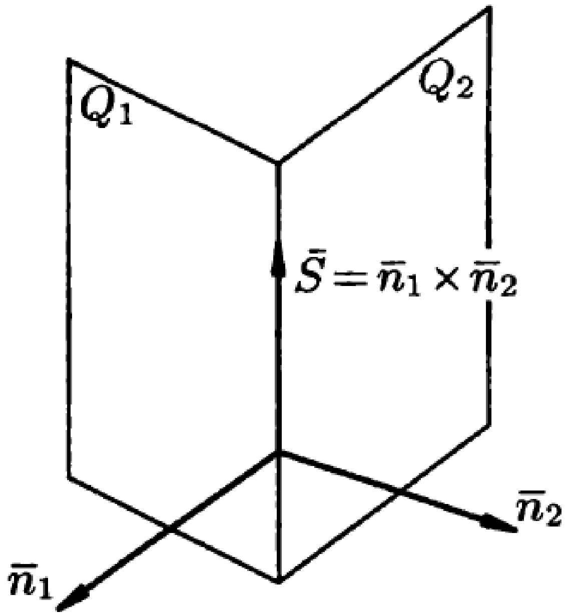
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \mu = \frac{1}{3}.$$

$$(x + 2y - 2z - 21) \cdot \mu = 0 \cdot \mu \Rightarrow$$

$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 7 = 0$ – нормальное уравнение плоскости, $\rho = 7$ – расстояние от начала координат до плоскости.

11.3. Способы задания прямой в пространстве

1) Прямую в пространстве можно задать как пересечение двух плоскостей, системой (11.8) в векторной форме или системой (11.9) в координатной:



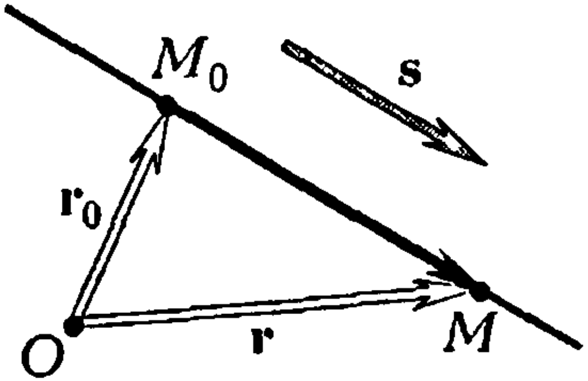
$$\begin{cases} \vec{r}\cdot\vec{n}_1+D_1=0, \\ \vec{r}\cdot\vec{n}_2+D_2=0. \end{cases} \tag{11.8}$$

$$\boxed{\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (11.9)}$$

Если эти плоскости не параллельны, т.е. их нормальные векторы: $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ и $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ не коллинеарны, то системы (11.8) и (11.9) определяют единственную прямую.

Систему (11.9) называют общими уравнениями прямой в пространстве.

2) Прямую в пространстве можно задать, определив принадлежащую ей точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\vec{s} = (m; n; p)$, параллельный этой прямой. Вектор $\vec{s}$ называется направляющим вектором прямой.



Для произвольной точки $M(x; y; z)$ прямой l имеем:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}.$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = \vec{s} \cdot t$, где параметр $t \in (-\infty; +\infty)$. Обозначая радиус-векторы точек M_0 и M соответственно $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ и $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, получаем:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s} \qquad (11.10)}$$

Уравнение (11.10) называется векторным уравнением прямой в пространстве.

Здесь каждому значению параметра t соответствует радиус-вектор $\vec{r}$ точки $M \in l$.

Для получения параметрических уравнений прямой представим уравнение (11.10) в координатной форме:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k},$$

$$t\vec{s} = tm\vec{i} + tn\vec{j} + tp\vec{k} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn\,, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + tp \end{cases} \qquad (11.11)$$

(11.11) – параметрические уравнения прямой в пространстве.

При изменении параметра t изменяются координаты x, y, z и точка $M(x; y; z)$ перемещается по прямой.

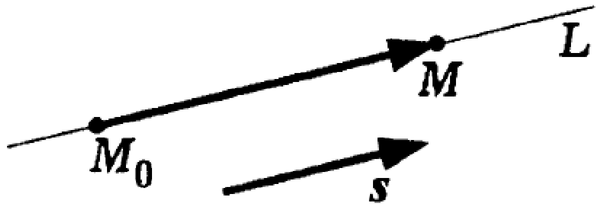
Если задана система вида (11.11), в которой хотя бы один из коэффициентов $m,\ n,\ p$ отличен от нуля, то эта система определяет в пространстве прямую.

Чтобы получить канонические уравнения прямой, выразим параметр t из каждого уравнения системы (11.11) и приравняем правые части полученных уравнений: $t = \frac{x-x_0}{m}$, $\quad t = \frac{y-y_0}{n}$, $\quad t = \frac{z-z_0}{p}$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (11.12)$$

Уравнения (11.12) – канонические уравнения прямой в пространстве.

Канонические уравнения представляю собой другую форму записи условия коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$, через пропорциональность их координат.



Уравнения (11.12) равносильны системе двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}, \\ \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}. \end{cases} \qquad (11.13)$$

Равенство $\frac{x-x_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$ является следствием первых двух.

Таким образом, канонические уравнения (11.12) задают прямую пересечением двух плоскостей. Плоскости, задаваемые уравнениями (11.13) обладают особенностями: первая из них параллельна оси Oz, вторая – оси Ox.

Замечание 11.1. В знаменателе канонических уравнений допускается нулевое значение (одно или два, но не все три).

Например, если направляющий вектор $\vec{s}$ прямой имеет координаты $\vec{s} = (0; n; p)$, то канонические уравнения прямой будут иметь вид:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

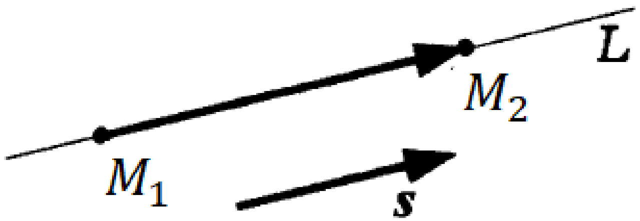
В этом случае $\vec{s} \perp Ox$ и $x = x_0$. Прямая расположена в плоскости $x = x_0$, параллельной координатной плоскости Oyz.

Аналогично, прямая:

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{0} = \frac{z - z_1}{p}$$

параллельна оси Oz, т.к. в этом случае $\vec{s} \perp Ox$ и $\vec{s} \perp Oy$ $(x = x_0, y = y_0)$.

3) Прямую в пространстве можно однозначно задать двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащими на этой прямой.



В качестве направляющего вектора, в этом случае, можно выбрать вектор:

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Тогда канонические уравнения прямой, проходящей через две точки, примут вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (11.14)$$

Пример 11.4. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(-1;2;6)$ и $B(3;0;5)$.

Решение. Воспользуемся формулой (11.14):

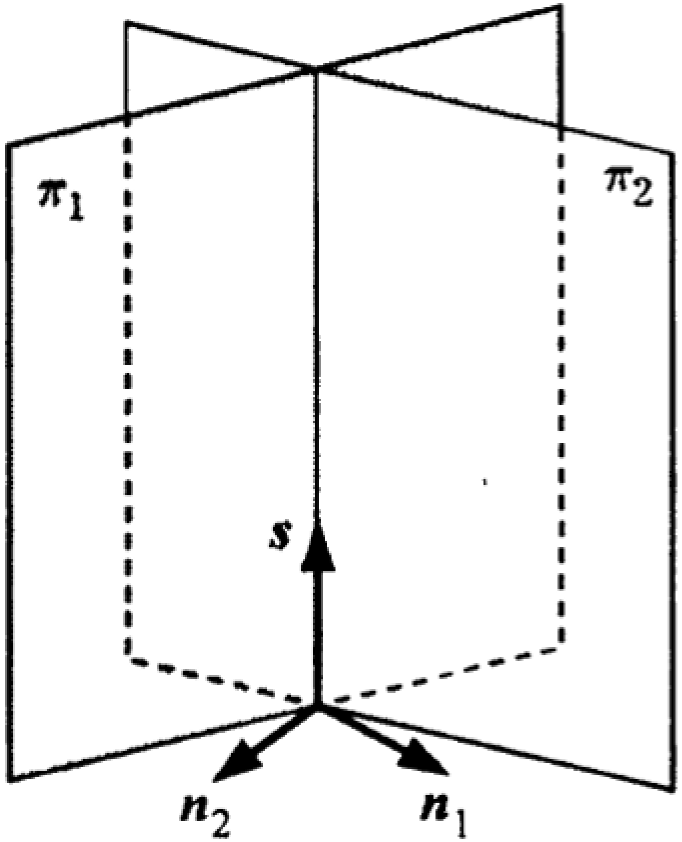
$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A} \Rightarrow$$

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z-6}{5-6} \Rightarrow$$

$\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-6}{-1}$ – канонические уравнения прямой AB.

Пример 11.5. Привести общие уравнения прямой l к каноническому виду.

$$l:\quad \begin{cases} x-2y+z+5=0, \\ -3x-z+1=0. \end{cases}$$



Решение. Найдем координаты какой-либо точки M_0, принадлежащей прямой l. Для этого одну из координат выберем произвольно.

Пусть $x_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2y + z + 5 = 0, \\ -z + 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 3, \\ z_0 = 1. \end{cases}$

Таким образом, точка $M_0(0; 3; 1) \in l$ найдена.

В качестве направляющего вектора прямой рассмотрим вектор $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, $\vec{s} \perp \vec{n}_1$ и $\vec{s} \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{s} \| l$.

$$\vec{n}_1 = \{1; -2; 1\}, \vec{n}_2 = \{-3; 0; -1\} \Rightarrow$$

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{s} = (2; -2; -6).$$

Найдем канонические уравнения прямой l по формуле:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-\ y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\Rightarrow$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{-6}\quad \text{или}\quad \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{-3}.$$

Пример 11.6. Записать канонические уравнения прямой: $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{-3}$ в параметрическом виде.

Решение. Пусть $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{-3}=t$, тогда $\begin{cases}\frac{x}{1}=t\\ \frac{y-3}{-1}=t\\ \frac{z-1}{-3}=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\ y=-t+3\\ z=-3t+1\end{cases}$

$\begin{cases}x=t\\ y=-t+3\\ z=-3t+1\end{cases}$ – параметрические уравнения прямой.

Пример 11.7. Записать общие уравнения прямой, заданной в параметрическом виде: $\begin{cases} x = t, \\ y = -t + 3, \\ z = -3t + 1. \end{cases}$

Решение. Запишем параметрические уравнения в каноническом виде:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t + 3 \\ z = -3t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x \\ t = -y + 3 \\ t = \frac{z-1}{-3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-3} \Rightarrow$$

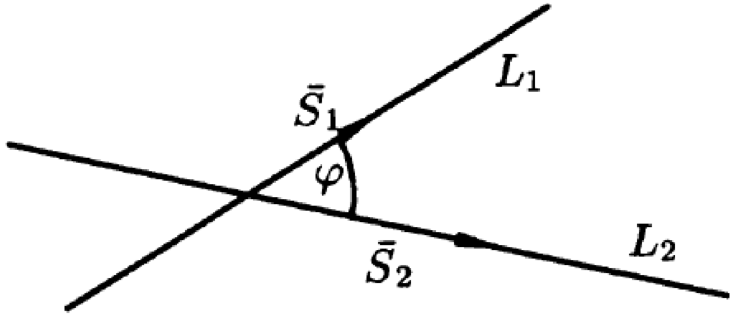
Выбирая два из трех уравнений, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1}, \\ \frac{x}{1} = \frac{z-1}{-3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 3x + z - 1 = 0. \end{cases}$$

$\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 3x + z - 1 = 0. \end{cases}$ – общие уравнения прямой.

11.4. Угол между прямыми в пространстве

Пусть в пространстве даны две прямые:



$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1},$$

$$L_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Угол между прямыми вычисляется как острый угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (11.15)$$

Условием перпендикулярности двух прямых является условие перпендикулярности их направляющих векторов $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$:

$$L_1 \perp L_2 \iff m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \qquad (11.16)$$

(11.16) – условие перпендикулярности двух прямых в пространстве.

Взаимное расположение прямых в пространстве:

1) прямые совпадают;
2) прямые параллельны и не совпадают;
3) прямые пересекаются;
4) прямые скрещиваются (не имеют общих точек и непараллельны).

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad L_2: \ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

$\vec{s}_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $\vec{s}_2=(m_2;n_2;p_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно. Прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, прямая L_2 проходит через точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$.

Если прямые совпадают или параллельны, то их направляющие векторы коллинеарны $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$ и их координаты пропорциональны:

$$\boxed{L_1 \parallel L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (11.17)}$$

Если прямые совпадают, то направляющим векторам $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ коллинеарен и вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1; z_2 - z_1)$:

$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}. \qquad (11.18)$$

Равенство (11.18) означает также, что точка M_2 лежит на прямой L_1.

Условием совпадения прямых в пространстве является выполнение равенств (11.17) и (11.18) одновременно.

Замечание 1.2. Проверить совпадение прямых можно также подстановкой пары точек одной из этих прямых в уравнение другой.

Условием параллельности прямых в пространстве является выполнение только равенства (11.17) и не выполнение (11.18).

Если прямые пересекаются или скрещиваются, то их направляющие векторы неколлинеарны, т.е. условие (11.17) не выполняется.

Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (11.19)$$

(11.19) – условие принадлежности прямых L_1 и L_2 одной плоскости.

Условие (11.19) не выполняется, только в случае, когда прямые скрещиваются, т.е. не принадлежат одной плоскости.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (11.20)$$

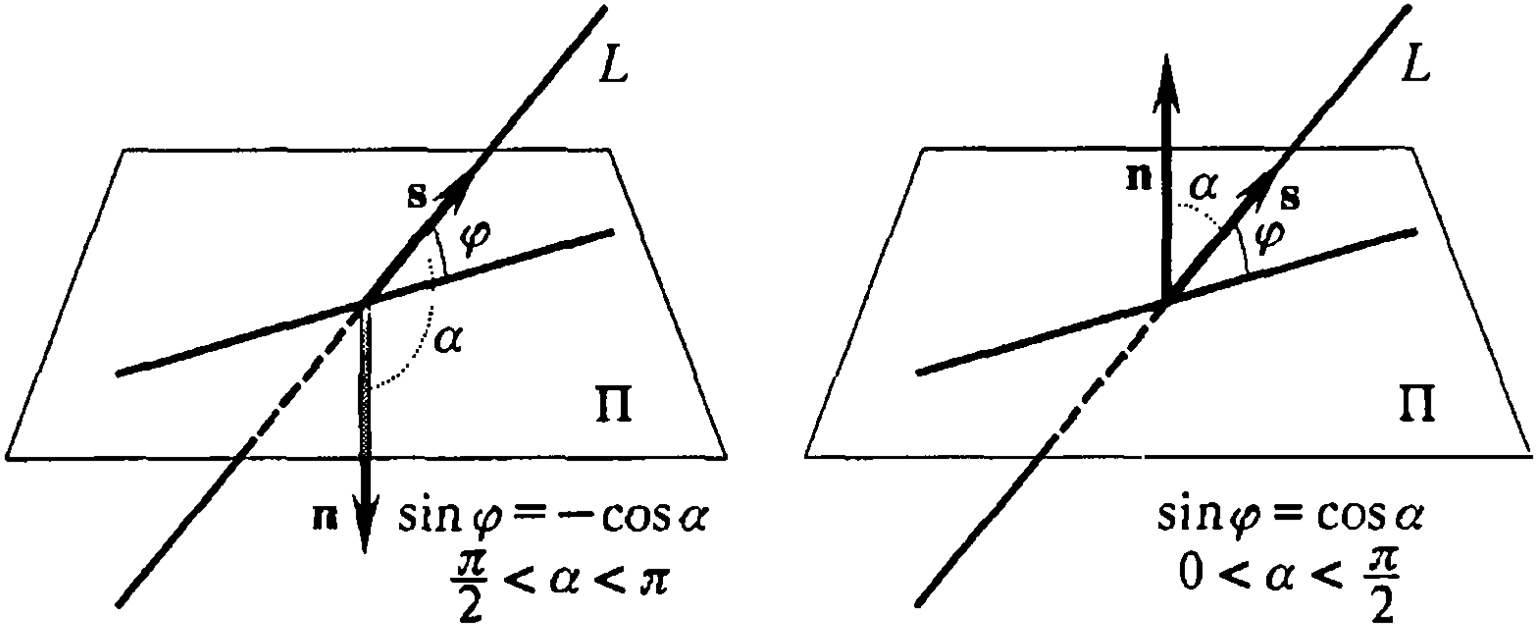
(11.20) – условие, при котором прямые L_1 и L_2 скрещиваются.

11.5. Угол между прямой и плоскостью. Пересечение прямой и плоскости

Пусть в пространстве даны прямая L и плоскость π:

$$L:\quad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\,,\qquad \pi:\;\; Ax+By+Cz+D=0\,.$$

Углом между прямой и плоскостью называют любой из двух смежных углов, образованных прямой с ее проекцией на плоскость.



Найдем синус угла φ, через косинус угла α между направляющим вектором $\vec{s}$ прямой и нормальным вектором $\vec{n}$ плоскости.

$$\cos\alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

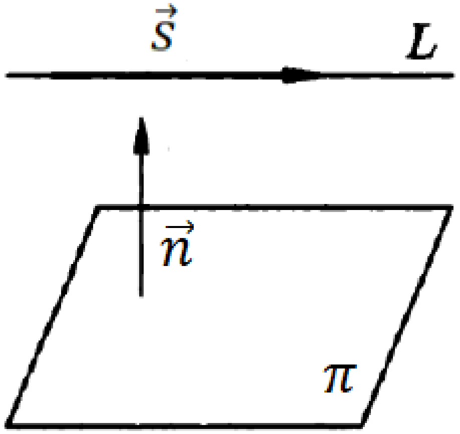
$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,\ 0 < \alpha < \pi/2,\ \sin\varphi = -\cos\alpha,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$

Так как $\sin\varphi = |\cos\alpha|$, то получаем:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (11.21)}$$

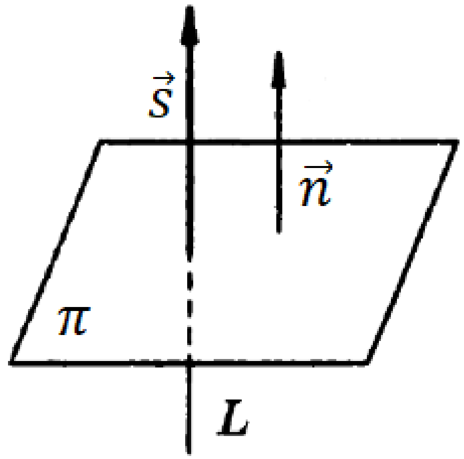
Условием параллельности прямой и плоскости является условие перпендикулярности направляющего вектора $\vec{s}$ прямой L и нормального вектора $\vec{n}$ плоскости π ($\vec{s} \perp \vec{n}$):

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (11.22)$$



при условии, что прямая не принадлежит плоскости.

Последнее условие легко проверить подстановкой в уравнение плоскости двух точек прямой.



Условием перпендикулярности прямой и плоскости является условие коллинеарности направляющего вектора $\vec{s}$ прямой L и нормального вектора $\vec{n}$ плоскости π $(\vec{s} \| \vec{n})$:

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C} \qquad (11.23)$$

Пересечение прямой и плоскости

Найдем координаты точки $P(x_1; y_1; z_1)$ пересечения прямой L и плоскость π, для чего запишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases}$$

Подставив значения x, y, z в левую часть уравнения плоскости π:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

найдем значение параметра t_1, соответствующее точке $P(x_1; y_1; z_1)$:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 \Rightarrow$$

$$t_1 = -\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}. \tag{11.24}$$

Подставив найденное значение t_1 в параметрические уравнения прямой L, получим координаты точки пересечения:

$$x_1 = x_0 + t_1 m, \quad y_1 = y_0 + t_1 n, \quad z_1 = z_0 + t_1 p. \tag{11.25}$$

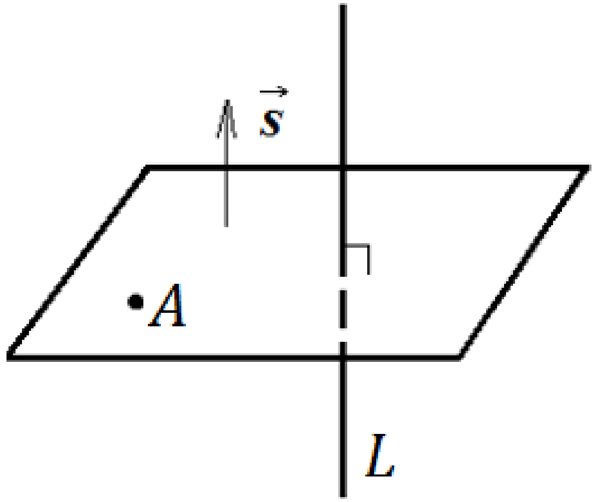
Если $Am + Bn + Cp = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая L параллельна плоскости π, а точка $(x_0; y_0; z_0)$, через которую проходит прямая, лежит вне этой плоскости. Следовательно, прямая L в этом случае не имеет с плоскостью π общих точек.

Если $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то в силу первого равенства прямая L параллельна плоскости π, а в силу второго равенства точка $(x_0; y_0; z_0)$ прямой лежит в плоскости.

Следовательно, одновременное выполнение равенств является условием принадлежности прямой L плоскости π:

$$\boxed{\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \tag{11.26}}$$

Пример 11.8. Дана точка $A(2;-4;1)$ и прямая L: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+3}{5}$. Написать уравнение плоскости π, проходящей через точку A перпендикулярно к прямой L.



Решение. Направляющий вектор $\vec{s}=(3;-1;5)$ прямой L является одновременно вектором нормали к плоскости π.

Тогда уравнение плоскости имеет вид:

$$3(x-2)-1(y+4)+5(z-1)=0 \Rightarrow$$

$3x-y+5z-15=0$ – уравнение плоскости π.

✓ ***Задача 11.1.*** Найти точку пересечения прямой L: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{2}$ с плоскостью π: $2x+3y-2z+2=0$.

11.6. Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть даны две скрещивающиеся прямые:

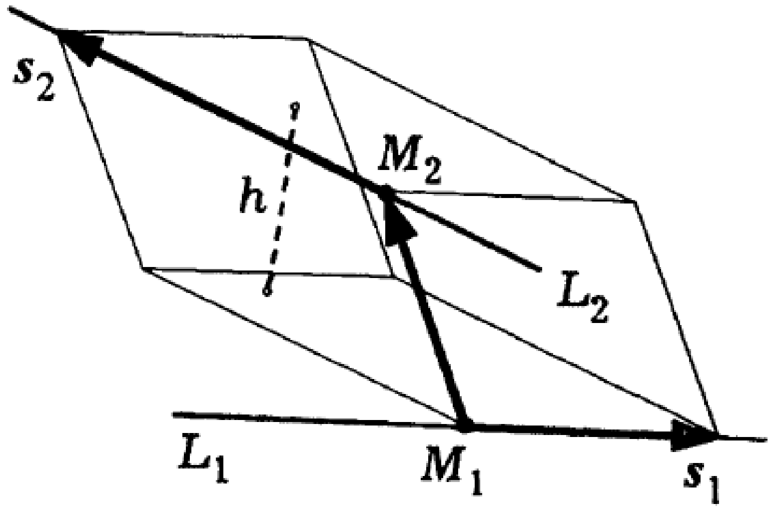
$$L_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad L_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кратчайшее расстояние h между ними равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, т.е. расстоянию между плоскостями (основаниями параллелепипеда), параллельными этим прямым и содержащими их.

Высоту найдем из формулы для объема параллелепипеда:

$$V = h \cdot S_{осн},$$

где $V = \left|\left(\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2\right)\right|$, $S_{осн} = |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|$.



Таким образом, кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми равно:

$$\boxed{h = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2\right)\right|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.} \qquad (11.27)$$

Условие неколлинеарности векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ гарантирует неравенство нулю знаменателя. Если $h = 0$, то прямые пересекаются.

Условие пересечения двух прямых имеет вид:

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \\ \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \neq 0 \end{cases} \qquad (11.28)$$

11.7. Пучок плоскостей

Определение 11.1. Совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую L, называется пучком плоскостей, а прямая L – осью пучка.

Пусть ось пучка задана общими уравнениями прямой:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую, имеет вид:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0, \qquad (11.29)$$

где параметр λ принимает любые действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Уравнение пучка плоскостей используют при решении задач, в которых требуется найти плоскость, проходящую через заданную прямую, причем значение множителя λ обычно находят из какого-либо дополнительного условия, которое определяет положение искомой плоскости.

Пример 11.9. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z + 1 = 0, \\ 3x - y + z + 28 = 0. \end{cases}$$

и точку $M_1(1; -2; 3)$.

Решение. Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую:

$$2x + 3y - 5z + 1 + \lambda(3x - y + z + 28) = 0.$$

Подставим в уравнение пучка координаты точки M_1:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 + 1) + \lambda(3 \cdot 1 - (-2) + 3 + 28) = 0.$$

Следовательно, $\lambda = \frac{1}{2}$. Подставляя найденное значение λ в уравнение пучка, найдем уравнение искомой плоскости:

$$2x + 3y - 5z + 1 + \frac{1}{2} \cdot (3x - y + z + 28) = 0 \Rightarrow 7x + 5y - 9z + 30 = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать уравнение плоскости, расположенной на равном расстоянии от двух данных параллельных плоскостей:

$$4x - 3y + \ z - 2 = 0 \text{ и } 4x - 3y + z + 8 = 0.$$

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(0;0;2)$ и $M_2(0;1;0)$ и образующей угол 45° с плоскостью Oyz.

3. Плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $3x + y + 2z - 18 = 0$ образуют треугольную пирамиду. Найти объем куба, вписанного в пирамиду так, что три его грани лежат на координатных плоскостях, одна из его вершин на последней плоскости $3x + y + 2z - 18 = 0$.

4. Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями:

$$2x - 2y + z + 5 = 0 \ \text{ и } x + 2y - 2z - 3 = 0.$$

5. При каких значениях p и B прямая $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{p}$ перпендикулярна плоскости $6x + By - 3z + 1 = 0$?

6. При каком значении α плоскость $\alpha x - 2y + 4z + 5 = 0$ параллельна прямой $\begin{cases} y - z = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$

7. Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости $10x + 2y - 11z + 450 = 0$.

8. Можно ли через прямую $\frac{x+2}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+1}{-3}$ провести плоскость параллельно плоскости $12x - y + 10z - 3 = 0$?

9. Лежит ли прямая $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-7}$ в плоскости $3x + 2y + z = 0$? А в плоскости $3x + 2y + z - 1 = 0$?

10. * Найти уравнение проекции прямой $\frac{x}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-3}$ на плоскость, заданную уравнением $2x - 3y + z - 4 = 0$.

11. * Даны вершины треугольника $A(3; -1; -1)$, $B(1; 2; -7)$, $C(-5; 14; -3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

12. * Найти уравнения плоскости, проходящей через прямую:

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ x - z + 4 = 0. \end{cases}$$

и образующей угол $45°$ с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$.

Спасибо за внимание!