ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент
e-mail: gorshunova@mirea.ru

РТУ МИРЭА
Кафедра ВМ-3

Горшунова Т.А.

Лекция № 10

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

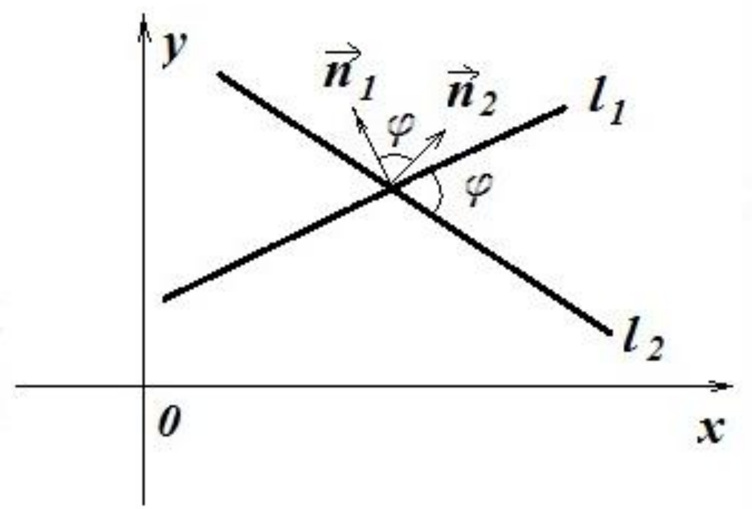
- Взаимное расположение прямых на плоскости
- Расстояние от точки до прямой
- Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору
- Общее уравнение плоскости
- Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, параллельно двум неколлинеарным векторам.
- Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой
- Уравнение плоскости в отрезках
- Угол между плоскостями. Взаимное расположение двух плоскостей
- Расстояние от точки до плоскости

07 ноября 2023 г.

10.1. Взаимное расположение прямых на плоскости

Рассмотрим две прямые, заданные общими уравнениями:

$$l_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

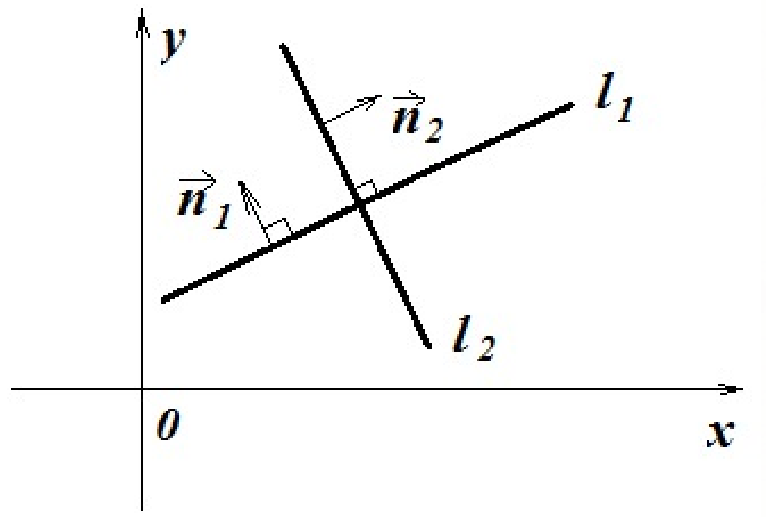


Угол между этими прямыми можно рассматривать как угол между их векторами нормали: $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$.

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.}$$

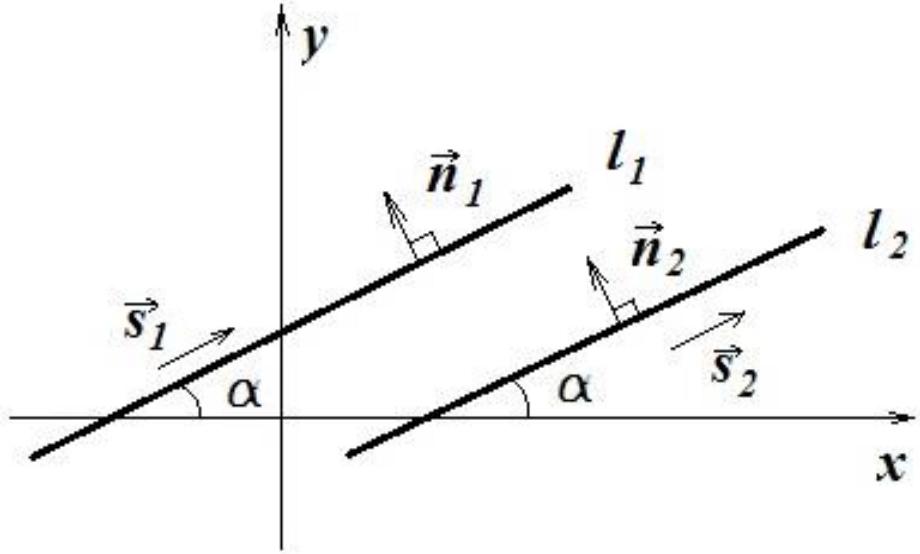
Следовательно, две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы перпендикулярны:

$$\boxed{\boldsymbol{l_1 \perp l_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 = 0}.}$$



Две прямые параллельны (не имеют общих точек) тогда и только тогда, когда их нормальные векторы коллинеарны:

$$l_1 \| l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$



Две прямые совпадают, тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Пусть даны две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Координаты их точки пересечения должны удовлетворять уравнению каждой прямой, т.е. они могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \tag{10.1}$$

Если прямые не параллельны, то система (10.1) имеет единственное решение.

10.2. Расстояние от точки до прямой

Можно показать, что расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой l: $Ax + By + C = 0$ на плоскости Oxy определяется по формуле:

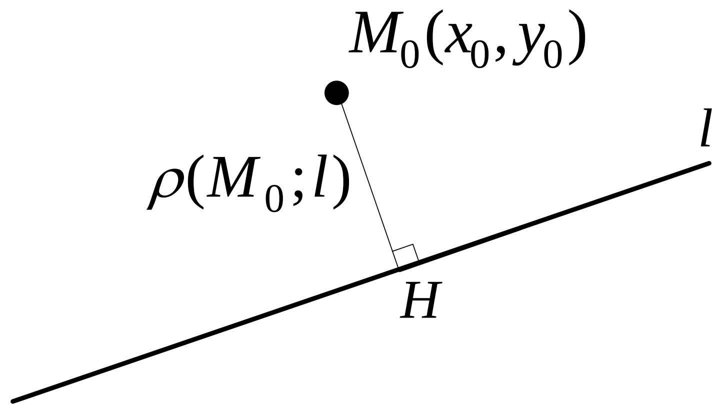
$$\boxed{\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.} \tag{10.2}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ произвольная точка плоскости.

Если $M_0(x_0, y_0) \in l$, то $Ax_0 + By_0 + C = 0 \Rightarrow \rho(M_0, l) = 0$.

Если $M_0(x_0, y_0) \notin l$, то $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$.

Опустим из точки M_0 перпендикуляр на прямую. Пусть $H(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра. Условием принадлежности точки $H(x_1, y_1)$ прямой l является равенство: $Ax_1 + By_1 + C = 0$.



Найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{HM_0}$ и $\vec{n}$ – вектор нормали прямой:

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{HM_0}\right) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 + C.$$

С другой стороны,

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{HM_0}\right) = |\vec{n}|\left|\overrightarrow{HM_0}\right| \cos\left(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{HM_0}}\right) = \pm|\vec{n}|\left|\overrightarrow{HM_0}\right|, \cos\left(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{HM_0}}\right) = \pm 1$$

(в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{HM_0}$ и $\overrightarrow{n}$).

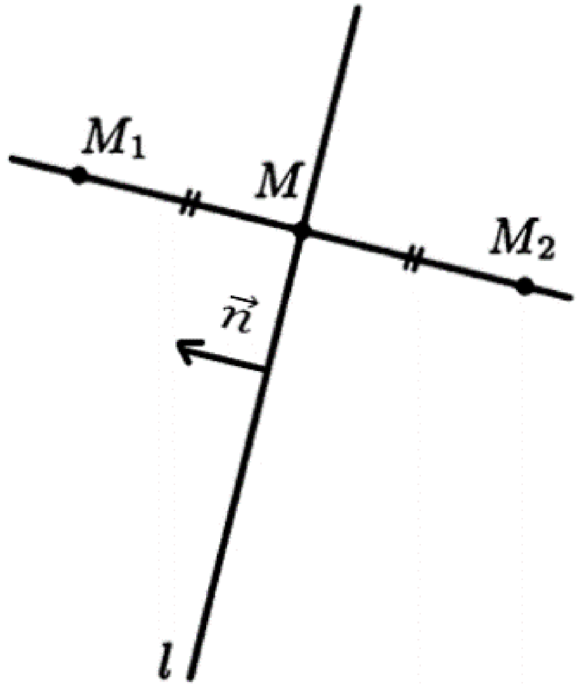
Так как $|\vec{n}| = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}$, а расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой равно длине перпендикуляра $HM_0 = \left|\overrightarrow{HM_0}\right| = \frac{Ax_0+By_0+C}{\pm|\vec{n}|} \Rightarrow \rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$.

Пример 10.1. Найти расстояние между параллельными прямыми:

$$2x - y + 5 = 0 \text{ и } 2x - y - 10 = 0.$$

Решение. Выберем на одной из прямых, например на прямой $2x - y + 5 = 0$, произвольную точку $M(0;5)$. Тогда искомое расстояние от точки $M(0;5)$ до прямой $2x - y - 10 = 0$:

$$\rho(M, l) = \frac{|2\cdot 0 - 1\cdot 5 - 10|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}.$$



Пример 10.2. Найти координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(2;-3)$ относительно прямой $l\colon \begin{cases} x = -3t + 4, \\ y = t - 2. \end{cases}$

Решение. Найдем уравнение прямой, проходящей через точку M_1 перпендикулярно прямой l. Вектор нормали $\vec{n}$ прямой l является направляющим вектором для перпендикуляра к этой прямой.

Из параметрических уравнений получим общее уравнение прямой l:

$$\begin{cases} x = -3t + 4, \\ y = t - 2. \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x-4}{-3} = \frac{y+2}{1} \Rightarrow x - 4 = -3y - 6 \Rightarrow x + 3y + 2 = 0,$$

следовательно, $\vec{n} = \{1; 3\}$ – вектор нормали прямой l.

Запишем каноническое уравнение прямой M_1M_2, перпендикулярной к прямой l, по формуле: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$.

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} \Rightarrow 3x - 6 = y + 3 \Rightarrow$$

$3x - y - 9 = 0$ – уравнение перпендикуляра M_1M_2 к прямой l.

Найдем точку M – точку пересечения прямой M_1M_2 с прямой l, т.е. проекцию точки M_1 на эту прямую.

Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+3y+2=0, \\ 3x-y-9=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2}, \\ y=-\frac{3}{2}. \end{cases} \Rightarrow M(2{,}5;-1{,}5).$$

Так как точки M_1 и M_2 симметричны, то точка M является серединой отрезка M_1M_2 и координаты точки M_2 можно найти из соответствующих формул. Обозначим x_2 и y_2 координаты точки M_2:

$$\begin{cases} \frac{2+x_2}{2}=\frac{5}{2}, \\ \frac{-3+y_2}{2}=-\frac{3}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=0. \end{cases} \Rightarrow (3;0) - \text{координаты точки } M_2.$$

$M_2(3;0)$ – точка, симметричная точке $M_1(2;-3)$ относительно прямой l.

Пример 10.3. Найти значение параметра a, при котором прямые:

$(3a+2)x+(3a+3)y+\frac{1}{2}=0$ и $(2a+3)x+(4a+2)y-\frac{4}{3}=0$ параллельны (не имеют общих точек).

Решение. Воспользуемся условием параллельности прямых, заданных своими общими уравнениями:

$$\frac{3a+2}{2a+3}=\frac{3a+3}{4a+2}\neq\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{4}{3}}.$$

Получим систему:

$$\begin{cases}\dfrac{3a+2}{2a+3}=\dfrac{3a+3}{4a+2},\\ \dfrac{3a+3}{4a+2}\neq\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{4}{3}}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3a+2)(4a+2)=(3a+3)(2a+3),\\ -\dfrac{4}{3}(3a+3)\neq\dfrac{1}{2}(4a+2).\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}12a^2+8a+6a+4=6a^2+6a+9a+9,\\ -4a-4\neq 2a+1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6a^2-a-5=0,\\ -6a\neq 5.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-\frac{5}{6}\end{array}\right.\\ a\neq-\frac{5}{6}\end{cases}\Rightarrow a=1.$$

Ответ: $a=1$.

Пример 10.4. Найти значение параметра a, при котором прямые:

$(3a+1)x+(2a+2)y+3=0$ и $(2a+2)x+(3a+1)y-3=0$ совпадают.

Решение. Две прямые, заданные своими общими уравнениями, совпадают, если:

$$\frac{3a+1}{2a+2}=\frac{2a+2}{3a+1}=\frac{3}{-3}.$$

Получили систему:

$$\begin{cases}\frac{3a+1}{2a+2}=-1,\\ \frac{2a+2}{3a+1}=-1.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3a+1=-2a-2,\\ 2a+2=-3a-1.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5a=-3,\\ 5a=-3.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-\frac{3}{5}.\\ a=-\frac{3}{5},\end{cases} \Rightarrow a=-\frac{3}{5}.$$

Ответ: $a=-\frac{3}{5}$.

10.3. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору

Определение 10.1. Уравнением поверхности в пространстве $Oxyz$ называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x, y и z каждой точки данной поверхности и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой поверхности.

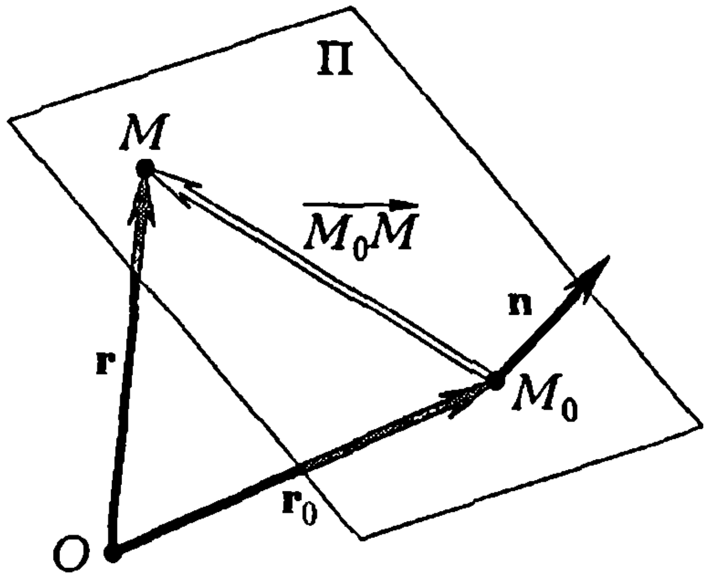
Уравнение поверхности записывается в виде: $F(x,y,z)=0$ или $z=f(x,y)$.

Если точка $M(x;y;z)$ передвигается по поверхности, то ее координаты, изменяясь, удовлетворяют уравнению этой поверхности. Координаты $(x;y;z)$ называются текущими координатами точеки поверхности.

Положение плоскости в пространстве можно задать точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащей плоскости, и вектором $\vec{n}=(A;B;C)$, перпендикулярным этой плоскости.

Любой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости, называется вектором нормали этой плоскости.

Рассмотрим произвольную точку $M(x;y;z)$, принадлежащую плоскости.



Вектор $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}\Rightarrow\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$.

Обозначим $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ и $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ радиус-векторы точек M и M_0.

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}.$$

Приравняв к нулю скалярное произведение $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}$, получим уравнение:

$$\boxed{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0. \qquad (10.3)}$$

Уравнение (10.3) называется векторным уравнением плоскости.

Записав уравнение (10.3) в координатной форме, получим уравнение:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (10.4)}$$

Уравнение (10.4) называется, уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$.

Замечание 10.1. Координаты любой точки M, принадлежащей плоскости, удовлетворяют уравнению (10.4). Координаты точки, не принадлежащей плоскости, не удовлетворяют, т.к. в этом случае вектор $\overrightarrow{M_0M}$ не перпендикулярен вектору $\vec{n}$.

Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется связкой плоскостей, а уравнение (10.4) – уравнением связки плоскостей.

10.4. Общее уравнение плоскости

Если в уравнении (10.3) раскрыть скобки, то получится векторное уравнение плоскости:

$$\vec{r} \cdot \vec{n} + D = 0, \tag{10.5}$$

где $D = -\vec{r}_0 \cdot \vec{n}$.

Записав это уравнение в координатах, получим уравнение:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{10.6}$$

Уравнение (10.6) называется общим уравнением плоскости. Уравнение (10.6) – уравнение первого порядка.

Теорема 10.1 (*об общем уравнении плоскости*). В пространстве уравнение любой плоскости в декартовых координатах является уравнением первого порядка вида (10.6):

$$Ax + By + Cz + D = 0, A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

И обратно, всякое уравнение первого порядка:

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

является уравнением некоторой плоскости.

Доказательство.

1) Рассмотрим уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$$

или

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Первая часть теоремы доказана.

2) Покажем, что всякое уравнение первой степени вида:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

является уравнением некоторой плоскости, если хотя бы один из коэффициентов A, B, C не равен нулю.

Действительно, например, если $A \neq 0$, то уравнение можно записать в виде (10.2):

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)+B(y-0)+C(z-0)=0.$$

Таким образом, уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ есть уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-\frac{D}{A};0;0)$, с нормальным вектором $\vec{n}=(A;B;C)$.

Теорема доказана.

Задача 10.1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;0;3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2;2;-2)$.

Задача 10.2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$: $M_0(-5;3;10)$, $M_1(0;5;7)$, $M_2(2;7;8)$.

Особые случаи расположения плоскости:

1. Если коэффициент $D=0$, то уравнение (10.4) имеет вид:

$$Ax+By+Cz=0$$

и координаты точки $O(0;0;0)$ удовлетворяют уравнению, следовательно, плоскость проходит через начало координат.

2. Если $A = 0$, то уравнение (10.4) имеет вид: $By + Cz + D = 0$ и нормальный вектор плоскости перпендикулярен оси Ox:

$$\vec{n} = (0; B; C) \perp \vec{i} = (1; 0; 0),$$

следовательно, данная плоскость параллельна оси Ox.

Если $C = 0$, то уравнение плоскости примет вид: $Ax + By + D = 0$, где вектор нормали $\vec{n} = (A; B; 0)$, перпендикулярен оси Oz. Следовательно, плоскость параллельна оси Oz.

Если $B = 0$, то плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy.

3. Если $A = 0$ и $D = 0$, то плоскость: $By + Cz = 0$ проходит через ось Ox, т.к. она параллельна оси Ox и проходит через начало координат.

Если $C = 0$ и $D = 0$, то плоскость: $Ax + By = 0$ проходит через ось Oz.

Если $B = 0$ и $D = 0$, то плоскость: $Ax + Cz = 0$ проходит через ось Oy.

4. Если $A = 0$ и $B = 0$, то уравнение плоскости: $Cz + D = 0$ и нормальный вектор плоскости параллелен оси Oz:

$$\vec{n} = (0; 0; C) \parallel \vec{k} = (0; 0; 1),$$

следовательно, данная плоскость параллельна плоскости Oxy и перпендикулярна оси Oz.

Аналогично, уравнениям $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz.

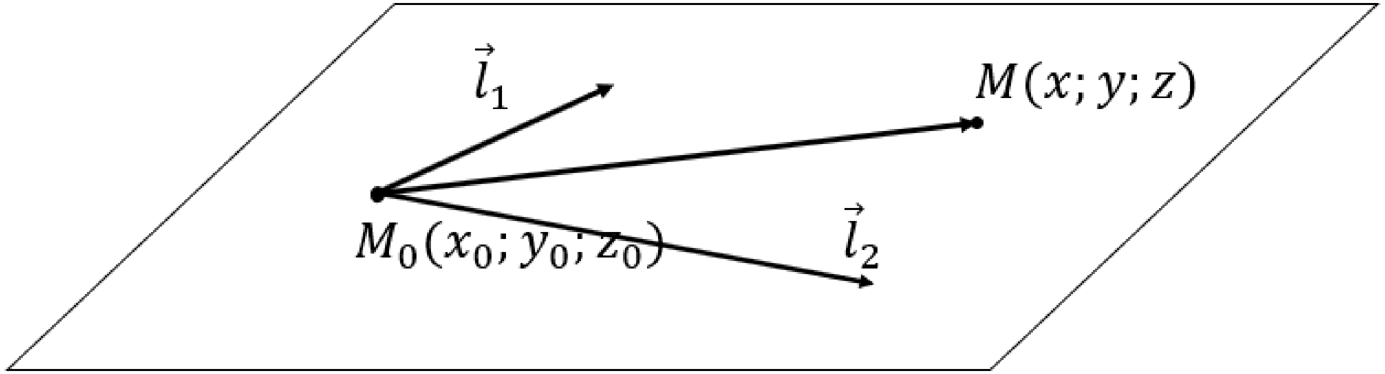
5. Если $A = B = D = 0$, то плоскость $z = 0$ является координатной плоскостью Oxy (параллельна плоскости Oxy и проходит через начало координат).

Аналогично, $y = 0$ – уравнение плоскости Oxz, $x = 0$ – уравнение плоскости Oyz.

10.5. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, параллельно двум неколлинеарным векторам

Плоскость в пространстве можно задать точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащей этой плоскости, и двумя неколлинеарными векторами $\vec{l}_1 = (\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ и $\vec{l}_2 = (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$, параллельными данной плоскости.

Так как точка $M(x; y; z)$ лежит в данной плоскости, то три вектора $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ и $\overrightarrow{M_0M}$ компланарны.



Критерий компланарности векторов – равенство нулю их смешанного произведения:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = 0.$$

Записав это условие в координатной форме, получим уравнение плоскости проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, параллельно двум заданным векторам $\vec{l}_1 = (\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ и $\vec{l}_2 = (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (10.7)$$

Аналогично, можно вывести уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (10.8)$$

Действительно, если $M\ (x, y, z)$ – текущая точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны и их смешанное произведение равно нулю.

Пример 10.4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 3; 1)$, $B(2; -1; 0)$ и $C(5; 6; 7)$.

Решение. Найдем два вектора, параллельных плоскости ABC:

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 2; -1 - 3; 0 - 1) = (0; -4; -1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (5 - 2; 6 - 3; 7 - 1) = (3; 3; 6).$$

В качестве точки плоскости подставим в уравнение (10.7) координаты точки $A(2;3;1)$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по первой строке, получим:

$$(x-2)\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-2)\cdot(-21) - (y-3)\cdot 3 + (z-1)\cdot 12 = 0 \Rightarrow$$

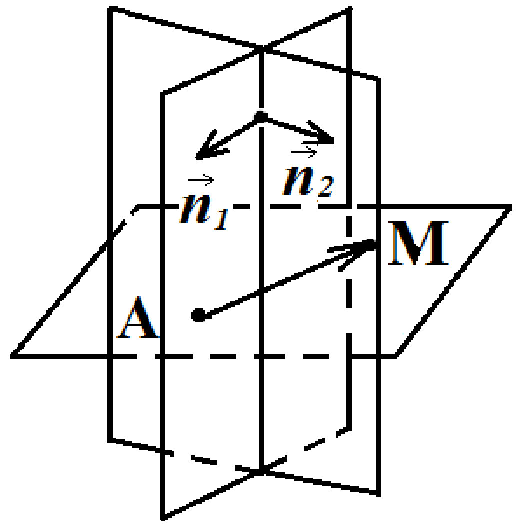
$$-21x - 3y + 12z + 39 = 0 \ \Rightarrow$$

$$-7x - y + 4z + 13 = 0.$$

Пример 10.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;1;-2)$, перпендикулярно плоскостям:

$$x + 3y - 2z + 1 = 0 \text{ и } -4x + 2y + z - 2 = 0.$$

Решение. Нормальные векторы заданных плоскостей $\overrightarrow{n_1} = (1;3;-2)$ и $\overrightarrow{n_2} = (-4;2;1)$ перпендикулярны каждый своей плоскости. Искомая плоскость проходит через точку А параллельно двум векторам $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$.



В качестве нормального вектора $\vec{n}$ искомой плоскости возьмем векторное произведение нормальных векторов $\overrightarrow{n_1} = (1; 3; -2)$ и $\overrightarrow{n_2} = (-4; 2; 1)$:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 7\vec{j} + 14\vec{k}.$$

Теперь воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку $A(3; 1; -2)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (7; 7; 14)$:

$$7(x-3) + 7(y-1) + 14(z+2) = 0 \;\Rightarrow$$

$$(x-3) + (y-1) + 2(z+2) = 0$$

$x + y + 2z = 0$ – уравнение искомой плоскости.

Спасибо за внимание!