ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция № 2

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

- Миноры и алгебраические дополнения.
- Определение определителей n-го порядка.
- Основные приемы вычисления определителей с использованием свойств определителей.
- Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

12 сентября 2023 г.

2.1. Миноры и алгебраические дополнения

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.1. ***Минором*** M_{ij} элемента a_{ij} матрицы А называется определитель матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i -ой строки и j -ого столбца.

Например, минор M_{12} элемента a_{12} матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

это определитель $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, который получается, если вычеркнуть в определителе матрицы A первую строку и второй столбец.

Определение 2.2. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, в которых стоит этот элемент: $i+j$ четна, и со знаком минус, если эта сумма нечетна:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример 2.1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ найти M_{23} и A_{31}.

Решение: $M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 42 = -22,$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3.$

2.2. Определители высших порядков

Дадим рекурсивное определение определителя квадратной матрицы произвольного порядка.

Определение 2.3. Определителем квадратной матрицы A порядка n называется число, вычисленное по рекуррентной формуле:

1) если $n = 1$, то $det\,A = a_{11}$;

2) если $n > 1$, то

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}, \qquad (*)$$

где M_{1j} – определитель квадратной матрицы порядка $(n-1)$, полученной из исходной матрицы A вычеркиванием первой строки и j-го столбца (минор элемента a_{1j} матрицы A).

Замечание 2.1. Формула $(*)$ называется разложением определителя по первой строке.

Замечание 2.2. Определитель n-го порядка сводится к сумме n определителей $(n-1)$-го порядка.

Замечание 2.3. Определитель n-го порядка состоит из $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n сомножителей – элементов матрицы А, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «+», другая – со знаком «−».

Замечание 2.4. Определитель n-го порядка равен сумме попарных произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения:

$$\boxed{det\,A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}.}$$

Теорема 2.1. Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \forall\, i = 1,2, \dots n.$$

или

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \forall\, j = 1,2, \dots n.$$

Замечание 2.5. Данные равенства называют *разложением определителя по элементам i-ой строки и j-го столбца* соответственно.

► Доказательство теоремы проведем для определителя третьего порядка. В этом случае имеют место шесть разложений – по трем строкам и трём столбцам.

Рассмотрим разложение определителя третьего порядка по элементам первого столбца:

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+$$

$$+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+$$

$$+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{13}a_{22}=|A|.$$

Последнее равенство следует из определения определителя третьего порядка. Аналогично проверяются остальные пять равенств. ◄

Теорема 2.2. Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или столбца) равна нулю (*без доказательства*).

Пример 2.2.

1) Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, используя разложение по третьему столбцу. Проверить результат, вычислив определитель, разложением по второй строке.

2) Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение:

1) Раскроем определитель по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-7) + 5 \cdot 5 = -21 + 25 = 4.$$

Теперь раскроем этот же определитель по элементам второй строки:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 21 = 4.$$

2) Раскроем определитель четвертого порядка по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-6 + 12 + 6 + 12) + 2 \cdot (4 - 2 + 4 - 4 - 2 + 4) = 48 + 8 = 56\,.$$

Замечание 2.6. Рекомендуется раскрывать определители по элементам той строки или того столбца, которые содержат нулевые элементы, т.к. это значительно сокращает процесс вычислений.

2.3. Основные приемы вычисления определителей с использованием свойств определителей

Свойства определителей:

1. Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами, т.е. $|A^T| = |A|$.

► Действительно, если разложить определитель матрицы A^T по элементам первой строки, а определитель матрицы A – по элементам первого столбца, то получится одинаковый результат. ◄

2. Если две строки (два столбца) определителя поменять местами, то определитель изменит знак.

► Доказательство проведем для определителя третьего порядка.

Пусть определитель $|\tilde{A}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ получен из определителя

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ перестановкой первой и второй строк.

Разложим определитель $|\tilde{A}|$ по второй строке, а определитель $|A|$ по первой строке:

$$|\tilde{A}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Тогда $|\tilde{A}| = -|A|$.

Аналогично можно рассмотреть остальные случаи. ◄

3. Если у определителя какая-либо строка (столбец) состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

► Если применить теорему 2.1 к нулевой строке, то получим $|A| = 0$. ◄

4. Определитель, у которого любые две строки (столбца) одинаковые, равен нулю.

► Действительно, если поменять местами две одинаковые строки (столбца), то матрица не измениться и ее определитель останется прежним. Но по свойству 2 определитель изменит знак: $|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$. ◄

5. Общий множитель какой-либо строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя.

▶ Рассмотрим определители $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ и $|\tilde{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

и разложим его по i-ой строке.

$$|\tilde{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in} =$$

$$= k\underbrace{(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in})}_{|A|} = k|A|.$$ ◀

6. Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя пропорциональны соответствующим элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

▶ Это свойство является следствием свойств 4) и 5). ◀

7. Если элементы какой-нибудь строки (столбца) определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух соответствующих определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

► Разложим исходный определитель по i-ой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{i1}+b_{i1})A_{i1} + \dots + (a_{in}+b_{in})A_{in} =$$

$$= (a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}) + (b_{i1}A_{i1} + \dots + b_{in}A_{in}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \blacktriangleleft$$

8. Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы любой другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится (*доказать самостоятельно*).

9. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов (*доказать самостоятельно*).

10. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |B \cdot A|$ (*доказать самостоятельно*).

Пример 2.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, используя свойства определителя.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathrm{I}\cdot 2+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{III} \\ \mathrm{I}\cdot(-1)+\mathrm{IV}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -6 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & -2 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot(-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 8 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathrm{II}\cdot(-4)+\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\cdot(-1)+\mathrm{IV}}}{=}$$

$$= -4\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & -3 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{III}\cdot(-10)+\mathrm{IV}}{=} 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 7 = 56.$$

Получили тот же результат, что и при разложении этого определителя по третьей строке.

Определение 2.4. Матрица, определитель которой равен нулю, называется ***вырожденной***. Матрица, определитель которой не равен нулю, называется ***невырожденной***.

2.4. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.1}$$

Введем обозначения $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец, составленная из неизвестных,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец, составленная из свободных членов.

Тогда система линейных уравнений может быть записана в матричном виде:

$$\boxed{A \cdot X = B. \qquad (2.2)}$$

Умножим каждое уравнение системы (2.1) на алгебраические дополнения к элементам первого столбца матрицы A: первое уравнение системы на алгебраическое дополнение A_{11}, второе – на A_{21}, …, последнее – на A_{n1} и сложим уравнения системы:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2 +$$

$$+ \cdots + (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1})x_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}.$$

Все слагаемые левой части кроме первого равны нулю по теореме 2.2, а правая часть имеет вид:

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_1| = \Delta_1,$$

тогда

$$|A|x_1 = |A_1| \Rightarrow x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \text{если } |A| = \Delta \neq 0.$$

Аналогично, умножая каждое уравнение системы (2.1) на алгебраические дополнения к элементам второго, третьего и т.д. столбцов матрицы A, получим формулы для нахождения остальных неизвестных $x_2, x_2, \dots, x_n$:

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta_2 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_2|,$

…

$$\Delta_n = b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix} = |A_n|.$$

Теорема 2.3 (правило Крамера). Если определитель матрицы коэффициентов системы уравнений (2.1) отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение, определяемое по ***формулами Крамера***:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.}$$

Если же $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ отличен от нуля, то система не имеет решений (несовместна).

$\Delta = |A|$ – определитель матрицы A коэффициентов системы,

$\Delta_i = |A_i|$ – определитель матрицы A_i, которая получается из матрицы A заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Замечание 2.7. Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = 0$, то метод Крамера не позволяет сделать вывод о решениях системы.

Пример 2.4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов. Тогда:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 6 - 1 - 4 - 3 = 1 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 3 - 0 - 2 - 0 = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - 3 = -1.$$

По формулам Крамера, получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Проверка:

$$\begin{aligned} &1 + 2 \cdot 0 + (-1) = 0 - \text{верно}, \\ &2 \cdot 1 + 0 + (-1) = 1 - \text{верно}, \\ &1 + 3 \cdot 0 + (-1) = 0 - \text{верно}. \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Числа 255, 391, 578 делятся на 17. Не вычисляя значение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ доказать, что он тоже делится на 17.

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -15, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = -6, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$$

3. Найти неизвестные коэффициенты многочлена $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, удовлетворяющего условиям: $f(-1) = 3$, $f(1) = 1$, $f(2) = -15$.

4. * Вычислить определители приведением к треугольному виду:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} -n & 1-n & 2-n & \dots & -2 & -1 \\ 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -1 & 0 \\ 2-n & 3-n & 4-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

5. * Вычислить определители методом рекуррентных соотношений (*разобрать метод самостоятельно*):

a) $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

b) $$\left.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}\right\} n$$

c) $$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Спасибо за внимание!