ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент
e-mail: gorshunova@mirea.ru

05 сентября 2023 г.

Список литературы:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры Издательство: СПб.: Лань, 2022. - 432 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Аналитическая геометрия, М: Физматлит, 2017. 224 с.
3. Канатников А.Н. Крищенко А.П. Линейная алгебра. М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2015. 336 с.
4. Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Проспект, 2015. 320 с.
5. Канатников А.Н. Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2016. 392 с.
6. Краснов М.Л., Киселев А.И., и др., Вся высшая математика., т. 1, М: URSS, 2014 г. 366 с.
7. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.

8. Зубков В.Г., Ляховский В.А., Мартыненко А.И., Миносцев В.Б. Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 1. Аналитическая геометрия. Линейная и векторная алгебра. -СПб.: Лань, 2013.

9. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. – 10-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2005. – 304 с.

10. Алгебра и геометрия, 1 семестр. Методическое пособие. / Под ред. Н.С. Чекалкина – М.: Российский технологический университет (МИРЭА), 2021.

11. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия. М.: Планета знаний, 2007. 469 с.

12. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч.1./Под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2003. 288 с.

13. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Физматлит, 2004. – 496 с.

Полезные ссылки:

https://online-edu.mirea.ru — сайт дистанционного обучения РТУ МИРЭА

https://linal-it-19.mozellosite.com — личный сайт лектора

Основные темы курса:

Тема 1. Матрицы и определители. Матричные уравнения. Решение систем линейных уравнений методом Крамера и с помощью обратной матрицы.

Тема 2. Ранг матрицы. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Тема 3. Векторная алгебра.

Тема 4. Прямая на плоскости. Плоскость и прямая в пространстве.

Тема 5. Кривые и поверхности второго порядка.

Тема 6. Комплексные числа. Теория многочленов.

Лекция №1

АЛГЕБРА МАТРИЦ

- Понятие матрицы. Виды матриц: прямоугольные, квадратные, треугольные и диагональные матрицы.
- Операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц. Основные свойства этих операций.
- Транспонирование матриц.
- Определители первого, второго и третьего порядков.

1.1. Матрицы, виды матриц.

Определение 1.1. Прямоугольная таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

составленная из $m \times n$ чисел или иных математических выражений a_{ij}, называется ***матрицей*** размера $m \times n$.

Горизонтальный ряд чисел в таблице (1.1) называется ***строкой***, а вертикальный – ***столбцом матрицы***.

Числа a_{ij} называются ***элементами матрицы***. Индексы элемента a_{ij} указывают на его местоположение в матрице.

Первый индекс i – номер строки ($i = 1,2, \dots, m$) матрицы, второй индекс j – номер столбца ($j = 1,2, \dots, n$).

Матрицы принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, D, \ldots$

$$A = \left(a_{ij}\right), i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$$

$$A = \begin{array}{c} \textbf{Столбец } \boldsymbol{j} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \ \textbf{Строка } \boldsymbol{i}$$

Определение 1.2. Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов ($m \neq n$), называется ***прямоугольной***.

Определение 1.3. Матрица, в которой число строк равно числу столбцов ($m = n$), называется ***квадратной***. Причем число строк или столбцов квадратной матриц называется её ***порядком***.

Определение 1.4. Матрица, состоящая только из одной строки ($1 \times n$) называется ***матрицей-строкой (вектор-строкой)***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.5. Матрица, состоящая только из одного столбца ($m \times 1$), называется ***матрицей-столбцом (вектор-столбцом)***: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Пример 1.1.

1) Матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 10 \\ 4 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – прямоугольная матрица размера 4×2.

Элементы матрицы A:

$a_{11} = -2$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 7$, $a_{22} = 10$, $a_{31} = 4$, $a_{32} = -5$, $a_{41} = 0$, $a_{42} = 1$.

2) Матрица $B = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 9 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица размера 3×3 (3-го порядка).

3) Матрица $C = (5)$ – квадратная матрица размера 1×1 (1-го порядка).

Определение 1.6. Последовательность элементов квадратной матрицы с одинаковыми индексами ($i = j$) называется ***главной диагональю*** матрицы $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Определение 1.7. Если в квадратной матрице все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$), то матрица называется ***диагональной:***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.8. Диагональная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице, называется ***единичной матрицей:***

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

или $E = \left(\delta_{ij}\right)$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ – символ Кронекера.

Определение 1.9. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нуль-матрицей*** (*нулевой матрицей*).

Определение 1.10. Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные выше (*нижне-треугольная*) или ниже (*верхне-треугольная*) главной диагонали, равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – верхне-треугольная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – нижне-треугольная матрица.

Определение 1.11. Квадратная матрица n-го порядка, элементы которой удовлетворяют условию: $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, называется ***симметричной*** (*симметрической*) матрицей.

Пример 1.2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ – симметричная матрица,

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – симметричная матрица.

Определение 1.12. Квадратная матрица n-го порядка, элементы которой удовлетворяют условию: $a_{ij} = -a_{ji}$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, называется ***кососимметричной*** (*кососимметрической* или *антисимметричной*) матрицей.

Замечание 1.1. Очевидно, что диагональные элементы кососимметричной матрицы равны нулю.

Пример 1.3. $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметричная матрица.

Определение 1.13. Элемент строки матрицы назовем ***крайним***, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю.

Определение 1.14. Матрицу размера $m \times n$ называют ***ступенчатой*** (*ступенчатого вида*), если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

Пример 1.4.

1) $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \mathbf{6} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ – ступенчатая,

2) $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{-4} & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 5 \end{pmatrix}$ – ступенчатая,

3) $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-5} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ – ступенчатая.

Очевидно, что не всякая треугольная матрица является ступенчатой.

Например, треугольная матрица $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{6} \end{pmatrix}$ не является ступенчатой.

1.2. Операции над матрицами.

Определение 1.15. Две матрицы A и B называются ***равными*** ($A = B$), если они имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов (одинаковый размер) и их соответствующие элементы равны:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}.$$

Пример 1.5. Найти значение параметра t, при котором две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & t^2 + t - 2 \\ 2t & -6 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3t + 4 & 0 \\ t^2 + 1 & -6 \end{pmatrix} \text{ равны.}$$

Решение. Приравнивая соответствующие элементы матриц, получим систему:

$$\begin{cases} 3t + 4 = 7 \\ t^2 + t - 2 = 0 \\ t^2 + 1 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \{-2{,}1\} \\ t = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

При $t = 1$ матрицы A и B равны.

Проверка. Если $t = 1$, то $A = B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$.

Ответ: $t = 1$.

Определение 1.16. ***Суммой*** двух матриц A и B одинакового размера $(m \times n)$ называется матрица C того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1,2, \dots, m, \quad j = 1,2, \dots, n.$$

Пример 1.6. Сложить матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+5 & 8+0 & 5-4 \\ 2+3 & -4+1 & 3-2 \\ 0+4 & -1+7 & 1+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.17. ***Произведением матрицы*** A ***на число*** $\alpha \in \mathbb{R}$ называется матрица $B = \alpha A = (b_{ij})$, элементы которой находятся по формуле:

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \quad i = 1,2,\dots,m, \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Пример 1.7. Умножить матрицу $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ на (-4).

Решение:

$$-4C = \begin{pmatrix} (-4)\cdot 1 & (-4)\cdot(-2) & (-4)\cdot 0 \\ (-4)\cdot(-5) & (-4)\cdot 4 & (-4)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 20 & -16 & 12 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.18. Линейной комбинацией двух матриц одинакового размера $(m \times n)$: $\alpha A + \beta B$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ называется матрица $C = \alpha A + \beta B = (c_{ij})$ того же размера, каждый элемент которой находятся по формуле:

$$c_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}, i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n.$$

Пример 1.8. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $3B - 4A$.

Решение:

$$3B - 4A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -12 \\ 9 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & -4 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 9 & -7 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.19. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ ***на матрицу*** $B = (b_{ij})$ размера $n \times k$ называется матрица $C = A \cdot B = (c_{ij})$ размера $m \times k$, каждый элемент которой определяется выражением:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj},$$

где $i = 1,2,\dots,m,\ \ j = 1,2,\dots,k.$

Замечание 1.2. Для того чтобы получить элемент c_{ij}, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце матрицы $C = AB$, необходимо элементы i-ой строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и полученные произведения сложить.

Замечание 1.3. Из определения следует, что перемножать можно лишь матрицы, у которых число столбцов первой матрица равно числу строк второй матрицы. В результате умножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько их имеет первая матрица, и столько столбцов, сколько их имеет вторая матрица.

Пример 1.9. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти все возможные произведения этих матриц.

Решение. Определим размеры этих матриц: $A_{2\times 3}, B_{3\times 1}, C_{1\times 3}$.

Таким образом, можно найти произведения матриц: $(A\cdot B)_{2\times 1}$, $(B\cdot C)_{(3\times 3)}$ и $(C\cdot B)_{(1\times 1)}$.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 3 + 4\cdot(-1) + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-6) & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) \\ (-1) \cdot (-6) & (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot (-2) \\ 1 \cdot (-6) & 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & 3 & -6 \\ 6 & -1 & 2 \\ -6 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-6) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = -21.$$

Пример 1.10. Найти произведение матриц AB и BA, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-1) + 0\cdot(-2) + 3\cdot 3 & 1\cdot 4 + 0\cdot 1 + 3\cdot 3 \\ 4\cdot 2 + 1\cdot 0 + 2\cdot(-2) & 4\cdot(-1) + 1\cdot(-2) + 2\cdot 3 & 4\cdot 4 + 1\cdot 1 + 2\cdot 3 \\ (-2)\cdot 2 + 5\cdot 0 + 1\cdot(-2) & (-2)\cdot(-1) + 5\cdot(-2) + 1\cdot 3 & (-2)\cdot 4 + 5\cdot 1 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 8 & 13 \\ 4 & 0 & 23 \\ -6 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, найдем BA:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 19 & 8 \\ -10 & 3 & -3 \\ 4 & 18 & 3 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1.4. Примеры показывают, что произведение двух матриц не коммутативно (не перестановочно): $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Определение 1.20. Матрицы A и B, для которых $A \cdot B = B \cdot A$, называются ***коммутативными*** (*перестановочными*).

Пример 1.11. Проверить, что матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ перестановочна с матрицей $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решить самостоятельно.

Замечание 1.5. Как известно, произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может и не иметь место, т.е. произведение двух не нулевых матриц может оказаться равным нуль-матрице.

Пример 1.12. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ на матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Свойства алгебраических операций над матрицами (при условии, что данные операции имеют смысл)**:**

1) $A + B = B + A$ – коммутативность.
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ – ассоциативность.
3) $A + O = A$, где O – нулевая матрица того же размера, что и матрица A.
4) $\alpha(\mathrm{A} + B) = \alpha\mathrm{A} + \alpha B, \forall\alpha \in \mathbb{R}$ – дистрибутивность.
5) $(\alpha + \beta)\mathrm{A} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{A}, \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – дистрибутивность.
6) $\alpha(\beta\mathrm{A}) = (\alpha\beta)\mathrm{A}, \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – ассоциативность.
7) $A \cdot B \neq B \cdot A$ – антикоммутативность.
8) $A(BC) = (AB)C$ – ассоциативность.
9) $(A + B)C = AC + BC$ – дистрибутивность.
10) $A \cdot E = E \cdot A$, где E – единичная матрица того же размера, что и матрица A (A – квадратная матрица).

Свойства доказываются исходя из определения соответствующих операций над матрицами.

Матричный многочлен.

Пусть задан многочлен степени n: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ и квадратная матрица A.

Определение 1.21. ***Матричным многочленом*** $f(A)$ называется выражение вида:

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E,$$

где $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}$, E – единичная матрица того же порядка что и A.

Пример 1.13. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $f(A) = 3A^2 - 5A + 2E =$

$$= 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 12 & 30 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -10 & -15 \\ 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3. Транспонирование матриц.

Определение 1.22. Матрица A^T называется ***транспонированной*** по отношению к матрице A, если она получена из матрицы A заменой строк этой матрицы её столбцами.

Например, по отношению к матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ размера 2×3 транспонированной будет матрица размера 3×2: $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Пример 1.14. Вычислить $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \cdot B$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ -8 & -7 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^T)^T = A$.

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T, \alpha \in \mathbb{R}.$

4) $(AB)^T = B^T A^T.$

Доказать самостоятельно.

1.4. Определители первого, второго и третьего порядков.

Каждой ***квадратной*** матрице A ставится в соответствие число, называемое ***определителем*** этой матрицы и обозначаемое $|A|$ или $det\,A$.

Определение 1.23. ***Определителем*** (или ***детерминантом***) ***первого порядка*** матрицы $A = (a_{11})$ называется число, равное единственному элементу a_{11} этой матрицы:

$$\boxed{det\,A = a_{11}.}$$

Определение 1.24. ***Определителем второго порядка*** матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число, определяемое по формуле:

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пример 1.15. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 6 - (-5) \cdot 3 = -12 + 15 = 3.$

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определение 1.25. Определителем третьего порядка называется число, определяемое по формуле:

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

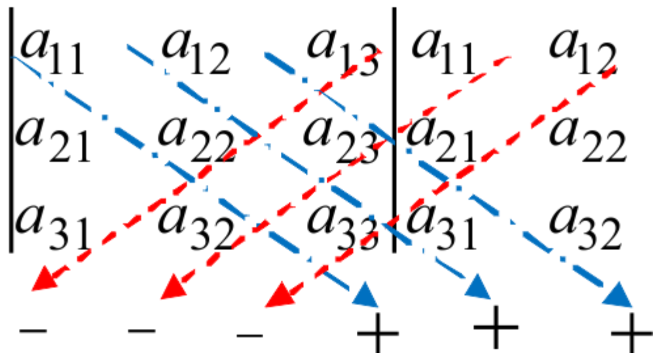
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Таким образом, определитель 3-го порядка есть сумма $6 = 3!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение 3-х сомножителей — элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «$+$», другая - со знаком «$-$».

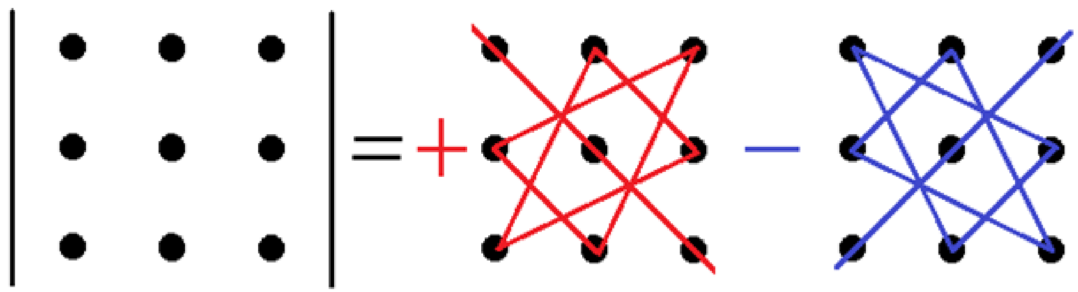
Для запоминания этой формулы используют мнемоническое правило, известное как ***правило Саррюса*** (*Пьер Фредерик Саррюс — французский математик)*: записываем определитель матрицы, затем справа от него приписываем первые два столбца матрицы:

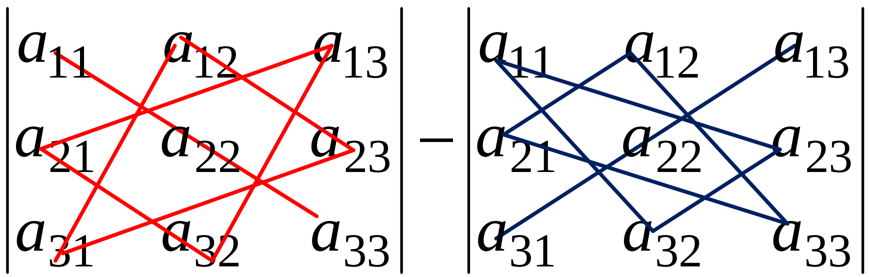
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Произведение элементов на главной диагонали и на диагоналях ей параллельных, берем со знаком «+», а произведения элементов на побочной диагонали и ей параллельных со знаком «$-$»:



Геометрическая схема – ***правило треугольников*** так же облегчает запоминание формулы определителя третьего порядка:





Пример 1.16. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 5 + 6 \cdot 0 \cdot 7 + 0 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 7 - 6 \cdot 0 \cdot 5 -$$

$$- 0 \cdot 4 \cdot 5 = 25 - 21 = 4.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить A^{2023}, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Найти все матрицы 2-го порядка, квадраты которых равны нулевой матрице $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Доказать свойства транспонирования матриц:

$(A^T)^T = A$,

$(A + B)^T = A^T + B^T$,

$(AB)^T = B^T A^T$.

5. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x + 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

6. Решить неравенство $\begin{vmatrix} 2 & x + 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

Спасибо за внимание!