ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

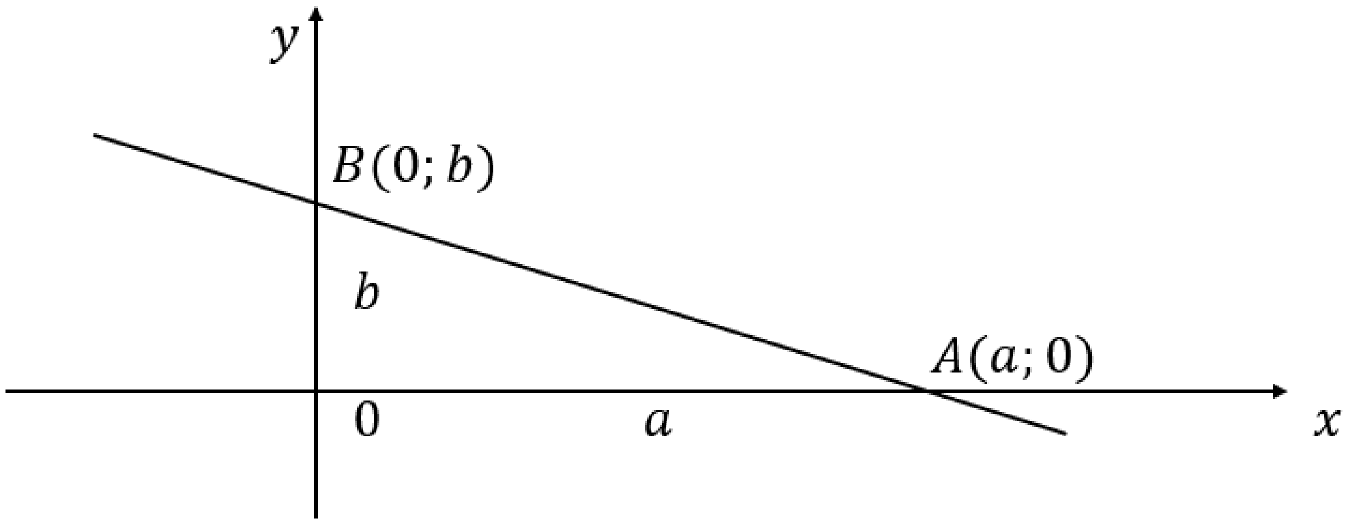
Лекция № 9

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

- Уравнение прямой в отрезках
- Нормальное и общее уравнения прямой
- Переход от канонического уравнения к общему уравнению прямой
- Уравнение прямой с угловым коэффициентом
- Угол между прямыми. Точка пересечения прямых
- Расстояние от точки до прямой

9.1. Уравнение прямой в отрезках

Найдем уравнение прямой по отрезкам $a \neq 0$ и $b \neq 0$, отсекаемым прямой на осях координат.



Прямая проходит через точки $A(a;0)$ и $B(0;b)$, тогда, согласно формуле (8.5), уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \Rightarrow -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (9.1)}$$

Равенство (9.1) – *уравнение прямой в отрезках*.

Пример 9.1. Вычислите площадь треугольника, отсекаемого прямой AB от координатного угла, если $A(5;-2)$ и $B(-1;4)$.

Решение. Запишем уравнение прямой AB, используя формулу (8.5):

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \frac{x-5}{-1-5}=\frac{y+2}{4+2} \Rightarrow \frac{x-5}{-6}=\frac{y+2}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{x-5}{-1}=\frac{y+2}{1}.$$

Запишем полученное уравнение в отрезках:

$$\frac{x-5}{-1}=\frac{y+2}{1} \Rightarrow x-5=-y-2 \Rightarrow x+y=3 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1.$$

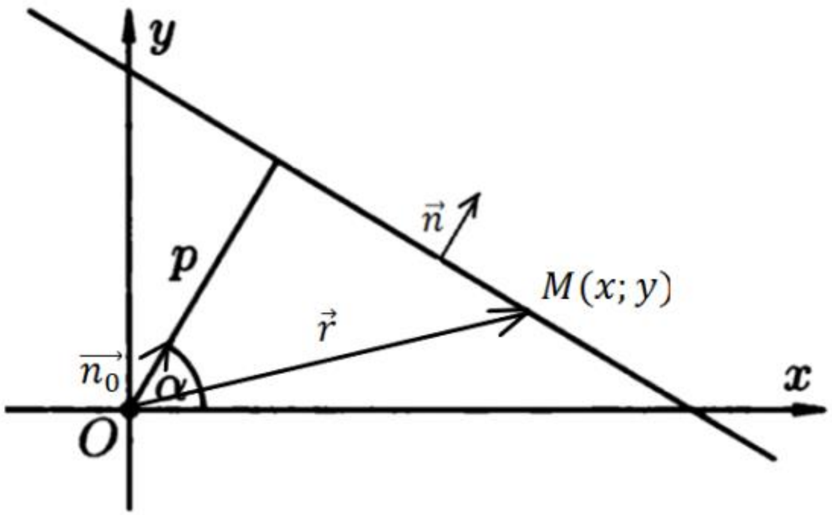
Прямая отсекает от координатных осей отрезки одинаковой длины равной 3, проходя через точки $A_1(3;0)$ и $B_1(0;3)$.

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}OA_1\cdot OB_1=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=4{,}5.$$

9.2. Нормальное и общее уравнения прямой

Положение произвольной прямой l на плоскости можно определить, если задать p – расстояние до прямой от точки O – начала координат и вектор $\vec{n}$ перпендикулярный прямой l (вектор $\vec{n}$ образует с осью Ox угол α).

Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный заданной прямой, называется *вектором нормали* прямой.



Рассмотрим вектор $\overrightarrow{n_0} = \overrightarrow{e_n}$ – единичный вектор нормали:

$$|\overrightarrow{n_0}| = 1 \text{ и } \overrightarrow{n_0} = \{\cos\alpha\,; \sin\alpha\}.$$

Если точка $M(x;y)$ – текущая точка прямой l, то проекция ее радиус-вектора на вектор $\overrightarrow{n_0}$ есть величина постоянная и равна p:

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{n_0}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{n_0} = \vec{r}\cdot\overrightarrow{n_0} = p \;\Rightarrow$$

$$\vec{r}\cdot\overrightarrow{n_0} - p = 0 \qquad (9.2)$$

Уравнение (9.2) называется *нормальным (нормированным) уравнением прямой в векторной форме*.

Так как $\overrightarrow{n_0} = \{\cos\alpha\,; \sin\alpha\}$ и $\vec{r} = \{x;y\}$, то имеем:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (9.3)$$

Равенство (9.3) – *нормальное уравнение прямой* в координатной форме.

Замечание 9.1. Уравнение (9.3) является уравнением первого порядка относительно x и y. Таким образом, в прямоугольной декартовой системе координат любая прямая на плоскости определяется уравнением первого порядка относительно переменных x и y. Верно и обратное.

Теорема 9.1. Любое уравнение первого порядка относительно переменных x и y определяет на плоскости прямую.

Доказательство. Рассмотрим уравнение первого порядка общего вида относительно переменных x и y:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0 .$$

Умножим обе части этого уравнения на множитель μ:

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$$

и подберем μ таким образом, чтобы получилось нормальное уравнение прямой вида (9.3).

Пусть $\mu A = \cos\alpha$, $\mu B = \sin\alpha$, $\mu C = -p \Rightarrow$

$$\mu^2(A^2 + B^2) = 1 \Rightarrow \mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

Из условия $\mu C = -p$ следует, что знак множителя μ надо брать противоположным знаку свободного члена C.

Подставив полученное значение μ в формулы: $\mu A = \cos\alpha$, $\mu B = \sin\alpha$, $\mu C = -p$, найдем $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и p, и можем записать нормальное уравнение прямой.

Таким образом, уравнение

$$\boxed{Ax + By + C = 0 \qquad (9.4)}$$

определяет прямую. Теорема доказана.

Уравнение (9.4) называется *общим уравнением прямой на плоскости*, а множитель μ называют *нормирующим множителем* для данного уравнения прямой.

***Замечание* 9.2.** Коэффициенты A и B являются координатами вектора нормали прямой, задаваемой уравнением (9.4):

$$\vec{n} = \{A, B\}.$$

Пример 9.2. Привести общее уравнение прямой $-2x + y + 5 = 0$ к нормальному виду. Найти расстояние от начала координат до этой прямой.

Решение. Найдем нормирующий множитель $\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Так как $C = 5 > 0 \Rightarrow$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} .$$

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \mu = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Приведем общее уравнение прямой $-2x + y + 5 = 0$ к нормальному виду:

$$(-2x + y + 5) \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \sqrt{5} = 0$ – нормальное уравнение прямой и $p = \sqrt{5}$ – расстояние от начала координат до прямой.

9.3. Переход от канонического уравнения к общему уравнению прямой

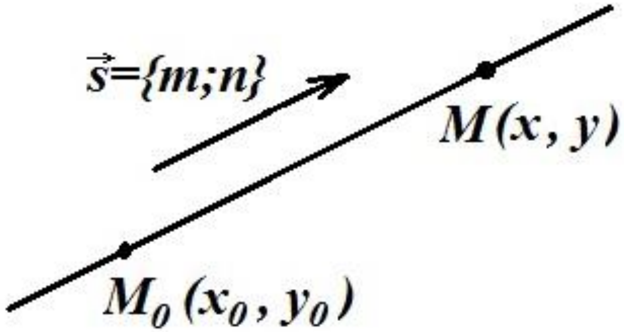
В каноническом уравнении избавимся от знаменателей и перенесем все члены по одну сторону от знака равенства:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow$$

$$n(x - x_0) = m(y - y_0) \Rightarrow nx - nx_0 - my + my_0 = 0 \Rightarrow$$

$$nx - my + (my_0 - nx_0) = 0.$$

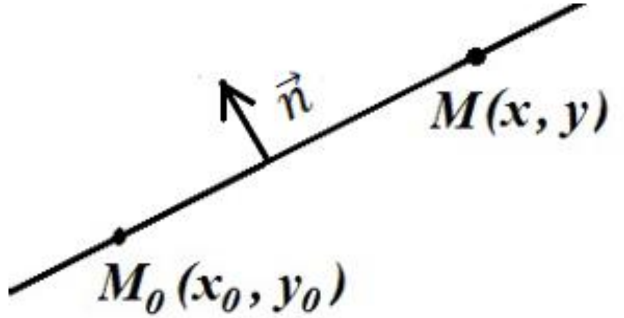
Вводя новые обозначения: $n = A$, $-m = B$ и $my_0 - nx_0 = C$, получим общее уравнение прямой:



$$Ax + By + C = 0\,.$$

Направляющий вектор прямой имеет координаты $\{m; n\}$, следовательно, из общего уравнения прямой можно найти координаты направляющего вектора и координаты вектора нормали:

$$\vec{s} = \{-B, A\},\ \ \vec{n} = \{A, B\}.$$



Рассмотрим скалярное произведение направляющего вектора прямой $\vec{s}$ и вектора нормали $\vec{n}$:

$$\vec{s}\cdot\vec{n} = (-B)\cdot A + A\cdot B = 0 \Rightarrow$$

векторы $\vec{s}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны.

Так как $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = t\cdot\vec{s}$ $\Rightarrow$ получаем векторное уравнение прямой:

$$\boxed{(\vec{r} - \overrightarrow{r_0})\cdot\vec{n} = 0.}$$

Запишем это уравнение в координатной форме:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (9.5)}$$

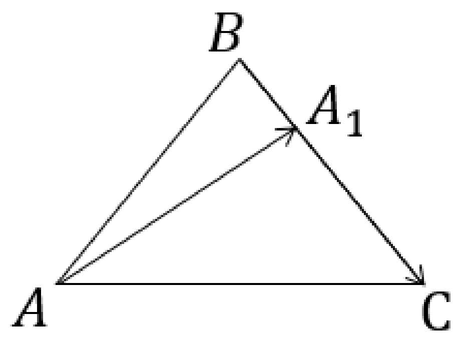
Уравнение (9.5) – уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B\}$.

Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то возможны случаи:

1) $A = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B} \Rightarrow$ прямая $\parallel OX$;
2) $B = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A} \Rightarrow$ прямая $\parallel OY$;
3) $C = 0 \Rightarrow Ax + By = 0 \Rightarrow$ прямая, проходящая через точку $O(0,0)$;
4) $A = C = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ прямая совпадает с осью OX;
5) $B = C = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ совпадает с осью OY.

Пример 9.3. Дан треугольник ABC с вершинами $A(3; 4)$, $B(-2; 2)$, $C(5; 3)$. Написать уравнение высоты AA_1.

Решение. Так как $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC}$, то $\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ – вектор нормали к прямой AA_1:



$$\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (5 - (-2); 3 - 2) = (7; 1)$$

Подставляя координаты вектора нормали в общее уравнение прямой, получим:

$$7x + y + C = 0.$$

Остается найти константу С, для чего подставим в данное уравнение координаты точки $A(3; 4)$:

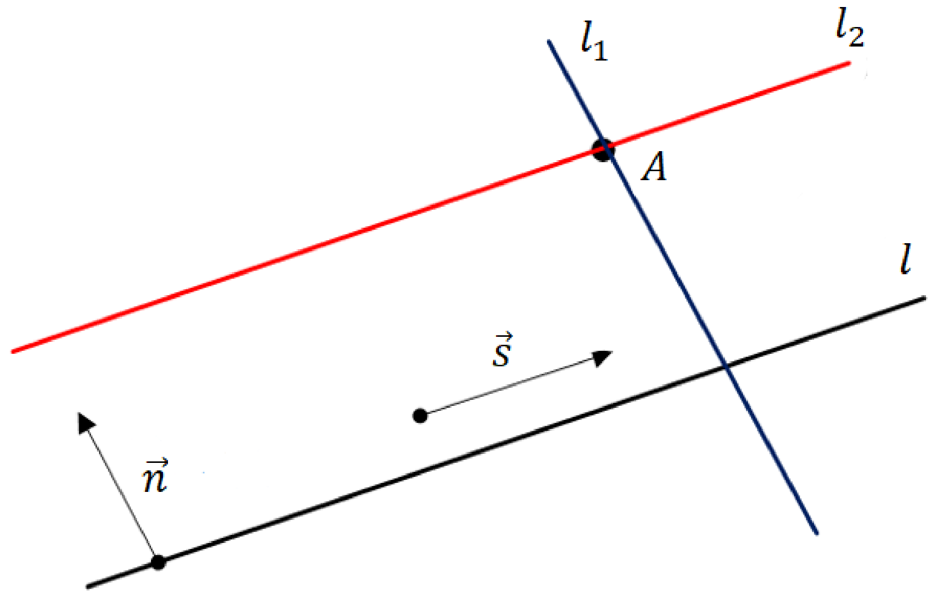
$$7 \cdot 3 + 4 + C = 0 \Rightarrow C = -25 \Rightarrow$$

уравнение высоты AA_1 имеет вид: $7x + y - 25 = 0$.

Пример 9.4. Написать общее уравнение прямой l_1, проходящей через точку $A(-3; 2)$, перпендикулярно прямой l: $\frac{x-4}{-5} = \frac{y+3}{1}$.

Решение. Если прямая $l_1 \perp l$, то направляющий вектор прямой l:

$\vec{s} = \{-5; 1\}$ является вектором нормали $\vec{n}$ для прямой l_1.



Тогда можно записать общее уравнение прямой l_1, используя формулу:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

где $\{A; B\}$ – координаты вектора нормали прямой l_1, $(x_0; y_0)$ – координаты точки, через которую проходит эта прямая.

Общее уравнение прямой l_1 имеет вид:

$$-5(x+3)+1(y-2)=0 \ \Rightarrow -5x+y-17=0.$$

9.4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим общее уравнение прямой:

$$Ax+By+C=0\,.$$

Пусть $B\neq 0$, тогда выразим переменную y:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}\,.$$

Обозначим $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$, тогда получаем *приведенное уравнение прямой* или *уравнение прямой с угловым коэффициентом*:

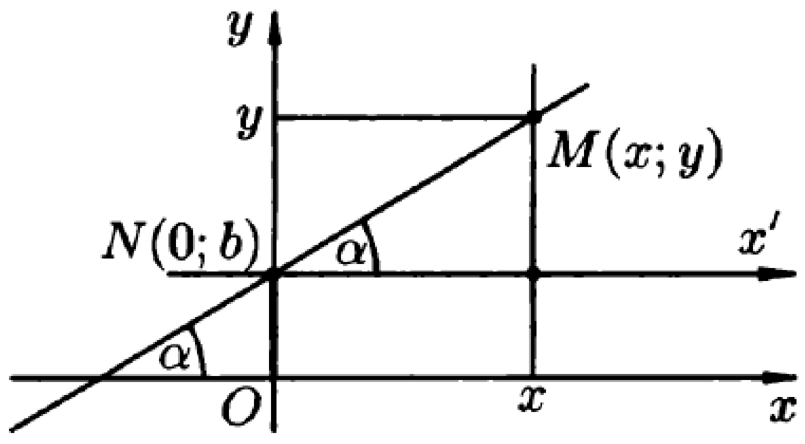
$$\boxed{y=kx+b\,. \qquad (9.6)}$$

Пусть для простоты $k>0$, $b>0$, тогда из уравнения $y=kx+b$ имеем:

$$\frac{x}{-b/k}+\frac{y}{b}=1.$$

Рассмотрим угол α, образованный прямой и положительным направлением оси абсцисс.

$$tg\alpha = \frac{b}{b/_k} = k.$$



Таким образом, k есть тангенс угла наклона прямой к оси Ox, или ***угловой коэффициент*** прямой.

Замечание 9.3. Если прямая перпендикулярна оси Ox, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $k = tg\frac{\pi}{2}$ не существует, т.е. вертикальная прямая не имеет углового коэффициента.

Если вертикальная прямая отсекает на оси $0x$ отрезок равный a, то ее уравнение имеет вид:

$$\boxed{x = a.}$$

Таким образом, прямую на плоскости можно задать точкой $M_0(x_0, y_0)$, через которую проходит прямая и угловым коэффициентом k этой прямой.

В уравнение $y = kx + b$ подставим координаты точки M_0:

$$y_0 = kx_0 + b \Rightarrow b = y_0 - kx_0 \Rightarrow$$
$$y = kx + y_0 - kx_0 \Rightarrow$$

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (9.7)$$

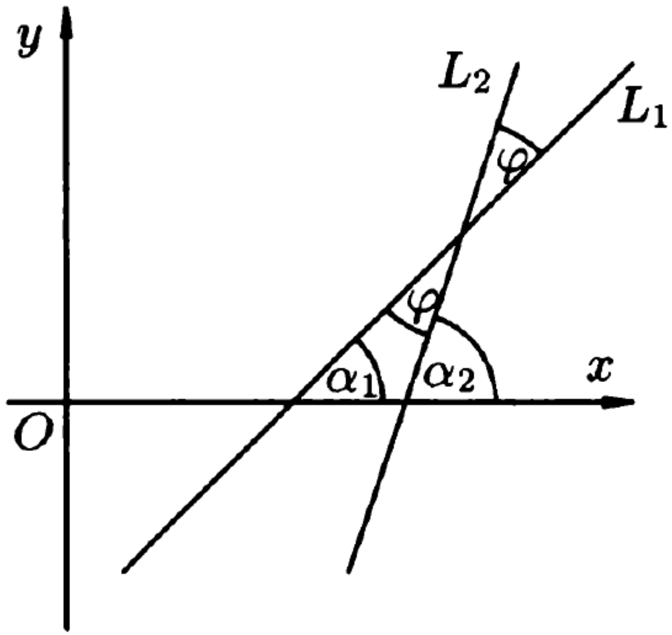
Уравнение (9.7) – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k.

9.5. Угол между прямыми. Точка пересечения прямых

Пусть заданы две прямые: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$.
Обозначим через φ угол между ними.
Из рисунка видно, что

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1,$$

где $tg\,\alpha_1 = k_1$, $tg\,\alpha_2 = k_2$.



Воспользуемся формулой:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\beta} \Rightarrow$$

$$tg\,\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_2\, tg\,\alpha_1} =$$

$$= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Таким образом, острый угол между двумя прямыми на плоскости находится по формуле:

$$tg\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \quad (9.8)$$

В частности, если угол составляет 90^0, то $tg\,90^0 = \infty$. Это возможно, если:

$$1 + k_1 k_2 = 0.$$

Получаем критерий перпендикулярности прямых:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \Rightarrow$$

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \quad (9.10)$$

Критерием параллельности двух невертикальных прямых на плоскости является равенство их угловых коэффициентов:

$$k_1 = k_2. \quad (9.11)$$

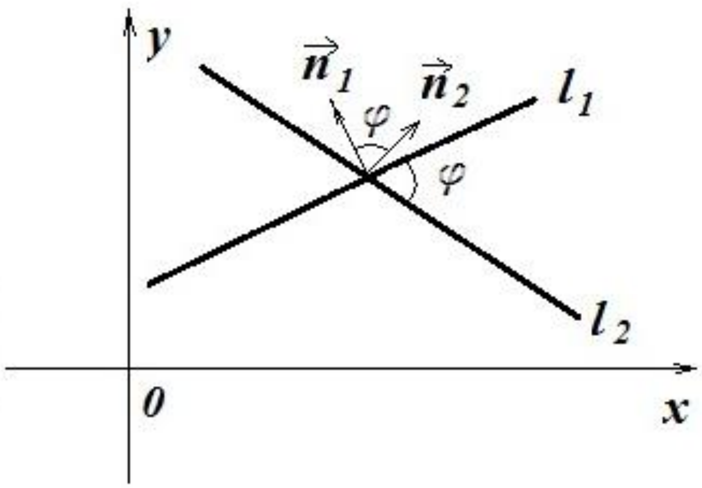
т.к. $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow tg\alpha_1 = tg\alpha_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.$

Рассмотрим две прямые, заданные общими уравнениями:

$$l_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

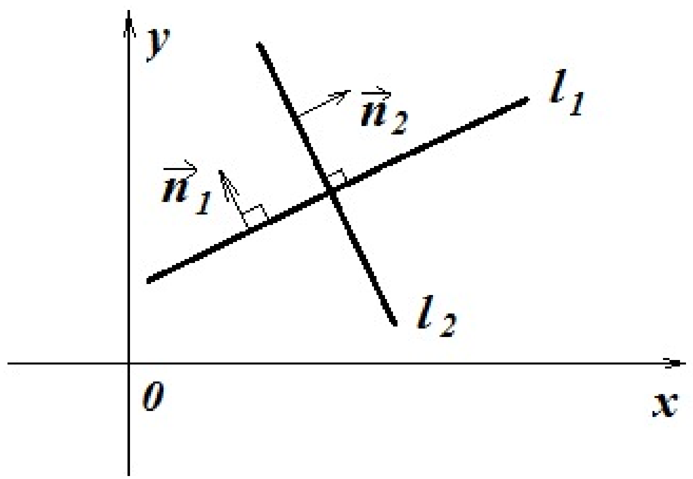
$$l_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Угол между этими прямыми можно рассматривать как угол между их векторами нормали: $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$.



$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

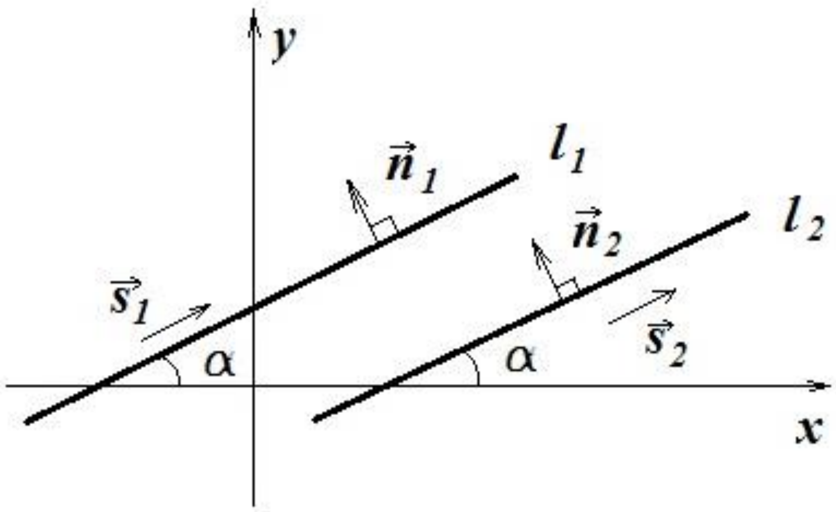
Следовательно, две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы перпендикулярны:



$$l_1 \perp l_2 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Две прямые параллельны (не имеют общих точек) тогда и только тогда, когда их нормальные векторы коллинеарны:

$$l_1 \| l_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$



Две прямые совпадают, тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.}$$

Пусть даны две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Координаты их точки пересечения должны удовлетворять уравнению каждой прямой, т.е. они могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \qquad (9.12)$$

Если прямые не параллельны, то система (9.12) имеет единственное решение.

9.6. Расстояние от точки до прямой

Можно показать, что расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой l: $Ax + By + C = 0$ на плоскости Oxy определяется по формуле:

$$\boxed{\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ произвольная точка плоскости.

Если $M_0(x_0, y_0) \in l$, то $Ax_0 + By_0 + C = 0 \;\Rightarrow\; \rho(M_0, l) = 0$.

Если $M_0(x_0, y_0) \notin l$, то $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$.

Опустим из точки M_0 перпендикуляр на прямую. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра. Условием принадлежности точки M_1 прямой l является равенство: $Ax_1 + By_1 + C = 0$.

Найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_0}$ и $\vec{n}$ – нормальный вектор прямой:

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0}\right) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 + C$$

С другой стороны $\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0}\right) = |\vec{n}|\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \cos\left(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0}}\right) = \pm|\vec{n}|\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$,

$\cos\left(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0}}\right) = \pm 1$ (в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_1M_0}$ и $\vec{n}$).

Так как $|\vec{n}| = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}$ и расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой равно длине перпендикуляра $M_1M_0 = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \frac{Ax_0+By_0+C}{\pm|\vec{n}|} \Rightarrow \rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$.

Пример 9.5. Найти расстояние между параллельными прямыми:

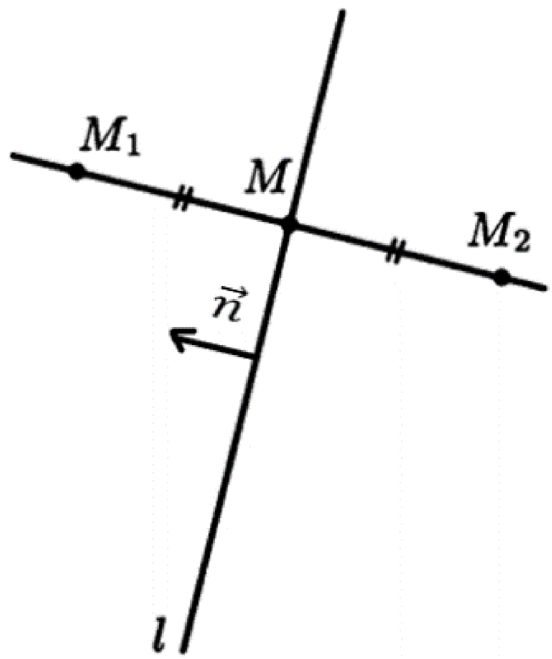
$$2x - y + 5 = 0 \text{ и } 2x - y - 10 = 0.$$

Решение. Выберем на одной из прямых, например на прямой $2x - y + 5 = 0$, произвольную точку $M(0; 5)$. Тогда искомое расстояние от точки $M(0; 5)$ до прямой $2x - y - 10 = 0$:

$$\rho(M, l) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}.$$

Пример 9.6. Найти координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(2; -3)$ относительно прямой l: $\begin{cases} x = -3t + 4 \\ y = t - 2 \end{cases}$.

Решение. Найдем уравнение прямой, проходящей через точку M_1 перпендикулярно прямой l.



Вектор нормали $\vec{n}$ прямой l является направляющим вектором для перпендикуляра к этой прямой.

Из параметрических уравнений получим общее уравнение прямой l:

$$\begin{cases} x = -3t + 4 \\ y = t - 2 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x-4}{-3} = \frac{y+2}{1} \Rightarrow$$

$$x - 4 = -3y - 6 \Rightarrow$$

$$x + 3y + 2 = 0$$

Следовательно, $\vec{n} = \{1; 3\}$ – вектор нормали прямой l.

Запишем каноническое уравнение прямой M_1M_2, перпендикулярной к прямой l , по формуле: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} \Rightarrow 3x - 6 = y + 3 \Rightarrow$$

$3x - y - 9 = 0$ – уравнение перпендикуляра M_1M_2 к прямой l.

Найдем точку M – точку пересечения прямой M_1M_2 с прямой l, т.е. проекцию точки M_1 на эту прямую.

Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 3y + 2 = 0 \\ 3x - y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M(2{,}5; -1{,}5).$$

Так как точки M_1 и M_2 симметричны, то точка M является серединой отрезка M_1M_2 и координаты точки M_2 можно найти из соответствующих формул. Обозначим x_2 и y_2 координаты точки M_2:

$$\begin{cases} \frac{2+x_2}{2} = \frac{5}{2} \\ \frac{-3+y_2}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3; 0) - \text{координаты точки } M_2.$$

$M_2(3; 0)$ – точка, симметричная точке $M_1(2; -3)$ относительно прямой l.

Пример 9.7. Найти значение параметра a, при котором прямые:

$(3a + 2)x + (3a + 3)y + \frac{1}{2} = 0$ и $(2a + 3)x + (4a + 2)y - \frac{4}{3} = 0$ параллельны (не имеют общих точек).

Решение. Воспользуемся условием параллельности прямых, заданных своими общими уравнениями:

$$\frac{3a+2}{2a+3}=\frac{3a+3}{4a+2}\neq\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{4}{3}}.$$

Получим систему:

$$\begin{cases}\dfrac{3a+2}{2a+3}=\dfrac{3a+3}{4a+2}\\ \dfrac{3a+3}{4a+2}\neq\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{4}{3}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3a+2)(4a+2)=(3a+3)(2a+3)\\ -\dfrac{4}{3}(3a+3)\neq\dfrac{1}{2}(4a+2)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}12a^2+8a+6a+4=6a^2+6a+9a+9\\ -4a-4\neq 2a+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6a^2-a-5=0\\ -6a\neq 5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-\frac{5}{6}\end{array}\right.\\ a\neq-\frac{5}{6}\end{cases}\Rightarrow a=1.$$

Ответ: $a=1$.

Пример 9.8. Найти значение параметра a, при котором прямые:

$(3a+1)x+(2a+2)y+3=0$ и $(2a+2)x+(3a+1)y-3=0$ совпадают.

Решение. Две прямые, заданные своими общими уравнениями, совпадают, если:

$$\frac{3a+1}{2a+2}=\frac{2a+2}{3a+1}=\frac{3}{-3}.$$

Получили систему:

$$\begin{cases}\dfrac{3a+1}{2a+2}=-1\\ \dfrac{2a+2}{3a+1}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+1=-2a-2\\ 2a+2=-3a-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5a=-3\\ 5a=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{5}\\ a=-\dfrac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{3}{5}$$

Ответ: $a=-\frac{3}{5}$.

Для наглядности представим основной теоретический материал по теме в виде двух таблиц.

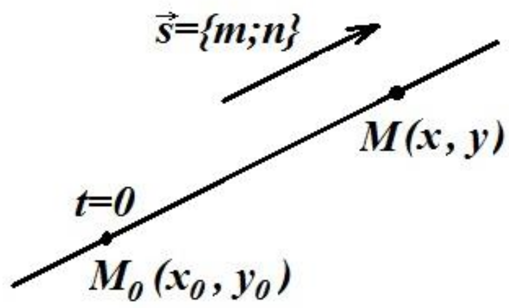
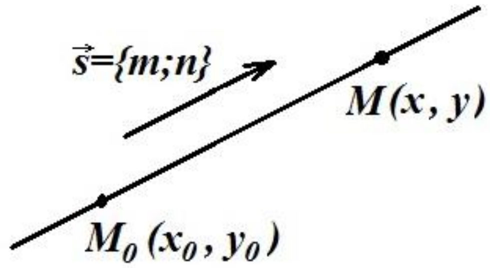
$M_0(x_0; y_0)$ – точка, через которую проходит прямая,

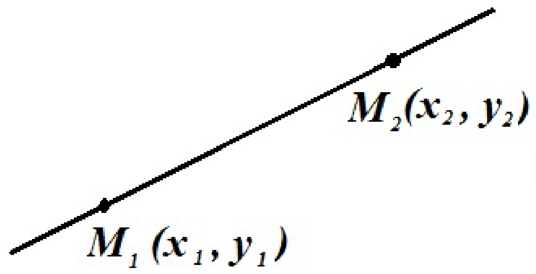
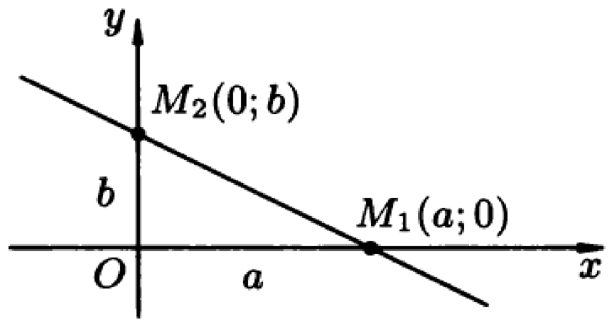
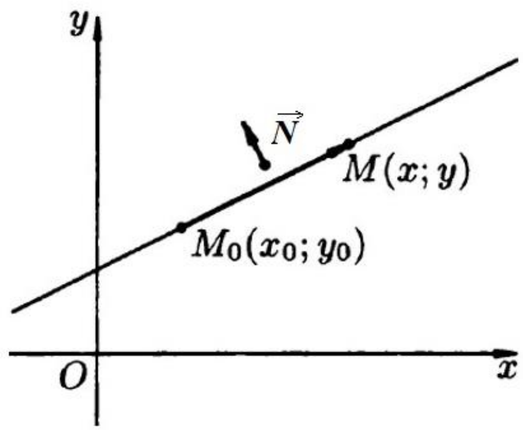
$\vec{s} = \{m; n\}$ – направляющий вектор прямой (вектор параллельный прямой),

$\vec{N} = \{A, B\}$ – вектор нормали прямой (вектор перпендикулярный прямой),

k – угловой коэффициент прямой.

Таблица 1. Уравнения прямой на плоскости

№	**Название**	**Вид уравнения**	**Чертеж**
1.	Параметрические уравнения прямой	$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$ $t \in (-\infty; +\infty)$	
2.	Каноническое уравнение прямой	$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$	

3.	Уравнение прямой, проходящей через две точки	$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$	
4.	Уравнение прямой в отрезках	$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$	
5.	Общее уравнение прямой	$$Ax+By+C=0,$$ $\vec{N}=\{A,B\}$ – вектор нормали прямой, $$A^2+B^2\neq 0.$$	

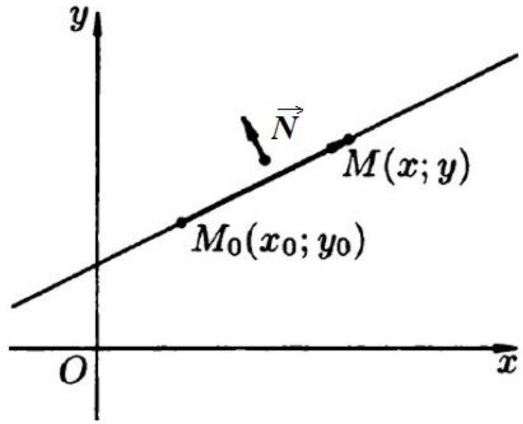
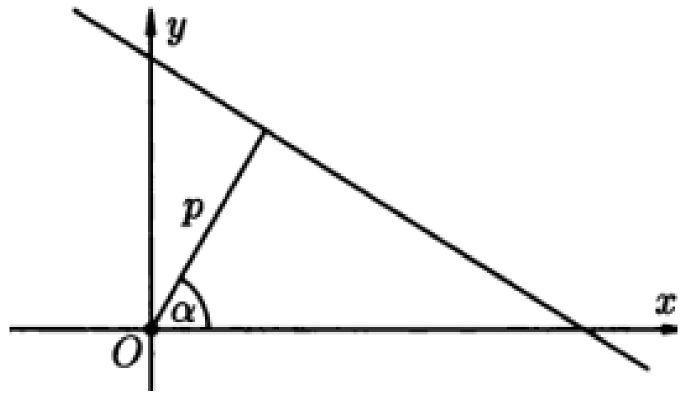
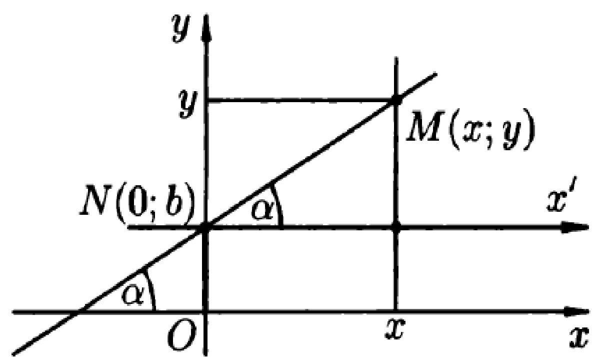
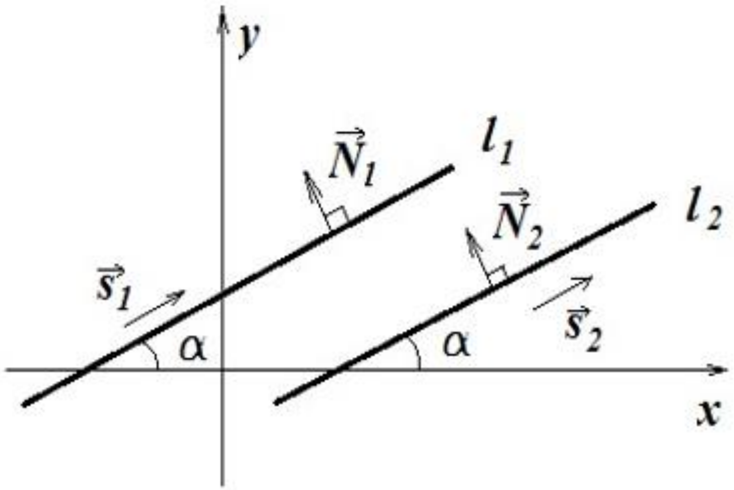
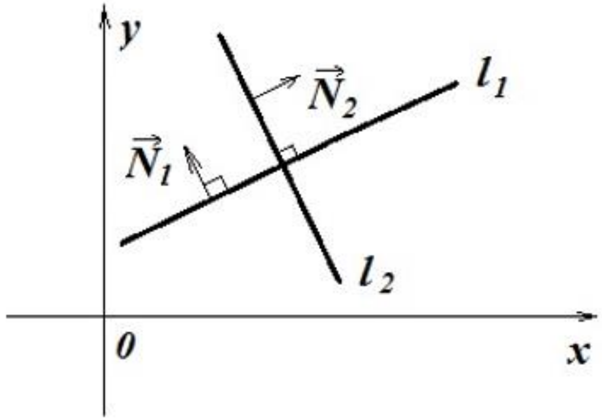
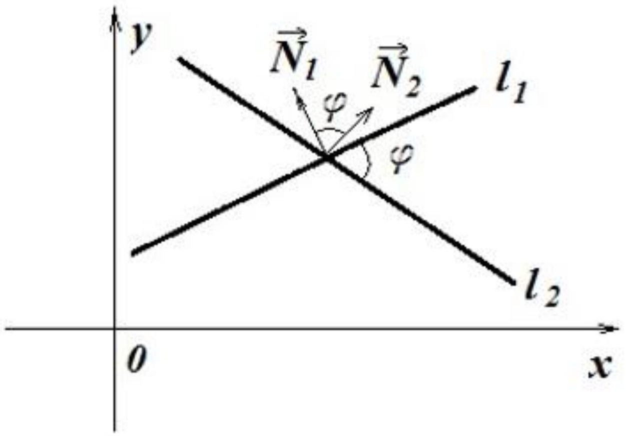
6.	Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A, B\}$.	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	
7.	Нормальное уравнение прямой	$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, $\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – нормирующий множитель, знак μ противоположен знаку свободного члена C в общем уравнении прямой: $Ax + By + C = 0$	
8.	Уравнение прямой с угловым коэффициентом	$y = kx + b,\ k = \operatorname{tg}\alpha$ $y - y_0 = k(x - x_0)$	

Таблица 2. Взаимное расположение прямых на плоскости

Расположение прямых	Уравнения прямых	Условия
Параллельность: $l_1 \parallel l_2$  $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$, $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$	$l_1\colon \ \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}$ $l_2\colon \ \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}$	$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$
	$l_1\colon\ y=k_1x+b_1$ $l_2\colon\ y=k_2x+b_2$	$k_1=k_2$
	$l_1\colon\ A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2\colon\ A_2x+B_2y+C_2=0$	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}\Rightarrow l_1\parallel l_2$ $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\Rightarrow l_1\equiv l_2$ (l_1 и l_2 совпадают)
Перпендикулярность: $l_1 \perp l_2$	$l_1\colon \ \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}$ $l_2\colon \ \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}$	$m_1m_2+n_1n_2=0$

 $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$ $\quad$ $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$	$l_1\colon y = k_1x+b_1$ $l_2\colon y = k_2x + b_2$	$k_1 \cdot k_2 = -1$
	$l_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $l_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
Пересечение: $l_1 \cap l_2$	$l_1\colon\ \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1}$ $l_2\colon\ \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2}$	Точка пересечения: $\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} \\ \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} \end{cases}$ Угол между прямыми: $cos\,\varphi = \dfrac{\lvert\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2\rvert}{\lvert\vec{s}_1\rvert \cdot \lvert\vec{s}_2\rvert} =$ $= \dfrac{\lvert m_1m_2 + n_1n_2\rvert}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}.$

<table>
<tr>
<td rowspan="2">
</td>
<td>$l_1 \colon y = k_1 x + b_1$
$l_2 \colon y = k_2 x + b_2$</td>
<td>Точка пересечения:
$\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases}$
Угол между прямыми:
$\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$</td>
</tr>
<tr>
<td>$l_1 \colon\ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$
$l_2 \colon\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$</td>
<td>Точка пересечения:
$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$
Угол между прямыми:
$cos\,\varphi = \dfrac{\left|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right|}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} =$
$= \dfrac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$</td>
</tr>
</table>

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $x + 2y - 6 = 0$ относительно точки A(4; 2).

2. Две смежные вершины квадрата имеют координаты (1; 4) и (4; 5). Найти координаты двух других вершин.

3. Даны координаты середин сторон треугольника: $A(1;2), B(7;4), C(3;\ -4)$.

Найти уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

4. Даны уравнения $4x - 3y - 17 = 0$ и $4x - 3y + 3 = 0$ двух сторон квадрата и одна из его вершин $A(2;\ -3)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат две другие стороны квадрата.

Спасибо за внимание!