ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция № 5

ТЕОРИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРОИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

- Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Свойства решений однородной системы.
- Фундаментальная система решений, структура общего решения однородной системы.
- Неоднородные системы линейных уравнений. Теорема о структуре общего решения совместной неоднородной системы.

5.1. Однородная система линейных алгебраических уравнений.

Пусть дана однородная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

или в матричной форме: $A \cdot X = O$.

Однородная система всегда совместна, так как существует тривиальное решение: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Теорема 5.1. Однородная система линейных уравнений имеет

- единственное (тривиальное) решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных: $r(A) = n$;
- хотя бы одно нетривиальное решение (бесконечное множество нетривиальных решений) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных: $r(A) < n$.

Доказательство теоремы 5.1 вытекает из теоремы Кронекера-Капелли.

Следствие. Если число уравнений однородной системы меньше числа неизвестных ($m < n$), то система имеет нетривиальные решения.

Теорема 5.2. Если число уравнений однородной системы равно числу неизвестных ($m = n$), то нетривиальные решения существуют тогда и только тогда, когда определитель системы $\Delta = |A| = 0$.

Определение 5.1. ***Частным решением*** СЛАУ будем называть матрицу-столбец значения неизвестных $X_0 = \begin{pmatrix} {x_1}^0 \\ {x_2}^0 \\ \cdots \\ {x_n}^0 \end{pmatrix}$, при подстановке которого в соответствующее СЛАУ матричное уравнение, получается тождество.

Определение 5.2. Совокупность всех частных решений СЛАУ называется ***общим решением*** системы.

Определение 5.3. Решения $X_1, X_2, \dots, X_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие константы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, что выполняется следующее равенство:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n = O$$

при условии, что среди коэффициентов λ_i есть хотя бы один, не равный нулю.

Если же указанное выше равенство возможно лишь при условии $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, то система решений $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется линейно независимой.

Пусть ранг матрицы однородной СЛАУ равен r ($r(A) = r$). Значит, есть хотя бы один минор порядка r, который не равен нулю (*базисный минор*). При этом все миноры, порядок которых выше r, равны нулю или не существуют.

Если коэффициенты при r переменных совместной СЛАУ образуют базисный минор матрицы системы А, то эти r переменных называют ***базисными***. Остальные $n - r$ переменных называют ***свободными***.

Свойства решений однородной СЛАУ:

1. Сумма решений однородной СЛАУ (5.1) также является решением этой системы.
2. Произведение решения однородной СЛАУ (5.1) на любое число также является решением этой системы.

✓ Доказать свойства самостоятельно, используя матричную запись системы (5.1).

Замечание 5.1. Любая линейная комбинация решений однородной СЛАУ также является решением однородной системы.

Теорема 5.3. Если ранг матрицы однородной СЛАУ равен r, то такая СЛАУ имеет $n-r$ линейно независимых решений: $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$.

Определение 5.4. Любая совокупность $n-r$ линейно независимых решений однородной СЛАУ называется ***фундаментальной системой решений (ФСР)*** данной СЛАУ.

Фундаментальная система решений определяется неоднозначно, т.е. однородная система может иметь разные фундаментальные системы, состоящие из $n-r$ линейно независимых решений.

Теорема 5.4 ***(об общем решении однородной системы).*** Если решения $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ образуют фундаментальную систему решений, то общее решение однородной СЛАУ имеет вид:

$$\boxed{X_{OO} = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_{n-r}X_{n-r},}$$

где $C_1, C_2, \dots, C_{n-r} \in \mathbb{R}$.

Замечание 5.2. Любое решение однородной линейной системы (5.1) является линейной комбинацией фундаментальной системы ее решений.

Пример 5.1. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Прямой ход. Выпишем матрицу коэффициентов системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{II}+\text{I}\cdot(-4) \\ \text{III}+\text{I}\cdot(-7)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \overset{\text{III}+\text{II}\cdot(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{II}:(-3)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = 2 < n$, где $n = 3$ – число переменных, то система совместная и неопределенная, т.е. имеет бесчисленное множество решений.

Так как $n - r = 1$, то одна переменная будет свободной, а остальные две – базисными. Выберем базисный минор: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ $x_1, x_2 -$ базисные переменные, а x_3 – свободная.

<u>*Обратный ход.*</u> По матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ выпишем систему эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = C$, $C \in \mathbb{R}$, тогда из последнего уравнения выразим $x_2 = -2C$. Теперь найдем x_1 из первого уравнения:

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 \Rightarrow x_1 = C.$$

Общее решение однородной системы имеет вид:

$$X_{OO} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ -2C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{R}.$$

Вектор-столбец $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ образует ФСР.

Проверка: $A \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – верно.

Ответ: $X_{OO} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{R}, \text{ФСР} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Пример 5.2. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Прямой ход. Выпишем матрицу коэффициентов системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{IV - II} \\ \text{III - I} \\ \text{II-I}\cdot 2}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -18 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{III}-\text{II}\cdot 2 \\ \text{IV}-\text{II}\cdot 2}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{II}:(-3)}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы коэффициентов $r(A) = 2 < n$, количество неизвестных $n = 5$. Следовательно, система совместная и неопределенная.

Так как $n - r = 5 - 2 = 3 \Rightarrow$ три переменные будут свободными, а две базисными. Выберем базисный минор: $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow x_1, x_3$ – базисные переменные, а x_2, x_4, x_5 – свободные.

<u>*Обратный ход.*</u> Запишем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_3 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{8}{3}x_5, \\ x_3 = -3x_5. \end{cases}$$

Пусть $x_2 = C_1,\ x_4 = C_2,\ x_5 = C_3$, где $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}C_1 - \frac{2}{3}C_2 + \frac{8}{3}C_3, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = -3C_3, \\ x_4 = C_2, \\ x_5 = C_3. \end{cases}$$

Общее решение системы можно записать в виде:

$$X_{OO} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Фундаментальная система решений однородной системы состоит из трех линейно независимых решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – верно,

$A \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – верно,

$$A \cdot X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ – верно.

Ответ: $$X_{OO} = C_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

5.2. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим неоднородную СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5.2}$$

или в матричной форме: $AX = B$.

Соответствующая системе (5.2) однородная система имеет вид (5.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

или в матричной форме: $AX = O$.

Свойства решений неоднородной СЛАУ:

1. Сумма некоторого частного решения однородной системы (5.1) и некоторого частного решения неоднородной системы (5.2) является частным решением неоднородной системы (5.2).

►Если X – частое решение системы (5.1), Y – частое решение системы (5.2), то $A(X+Y) = AX + AY = O + B = B$. ◄

2. Разность двух частных решений неоднородной системы (5.2) является частным решением однородной системы (5.1).

►Если X и Y – частные решения системы (5.2) ⇒

$$A(X-Y) = AX - AY = B - B = O. \blacktriangleleft$$

Пусть $X_{ЧН}$ – частное решение неоднородной системы (5.2), X_{OO} – общее решение соответствующей ей однородной системы (5.1).

Рассмотрим сумму решений $X_{OO} + X_{ЧН}$:

$$A(X_{OO} + X_{ЧН}) = AX_{OO} + AX_{ЧН} = 0 + B = B.$$

Теорема 5.5 ***(об общем решении неоднородной системы).*** Общее решение неоднородной системы (5.2) представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы (5.1) и частного решения системы (5.2):

$$\boxed{X_{OH} = X_{OO} + X_{ЧН}.}$$

Если решения $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ образуют фундаментальную систему решений, то общее решение неоднородной СЛАУ имеет вид:

$$\boxed{X_{OH} = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \cdots + C_{n-r} X_{n-r} + X_{ЧН},}$$

где $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ – произвольные постоянные.

Пример 5.3. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений, выписать частное решение, указать ФСР соответствующей однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. *Прямой ход.* Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{II}+\text{I}\cdot(-4) \\ \text{III}+\text{I}\cdot(-7)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & -12 & 6 \end{array}\right) \overset{\text{III}+\text{II}\cdot(-2)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{II}:(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Так как $r(A|B) = r(A) = 2 < n = 3$, то система совместная и неопределенная.

Выберем базисный минор: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ переменные x_1, x_2 – базисные, а x_3 – свободная.

Обратный ход. По матрице $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right)$ выпишем систему эквивалентную исходной: $\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0,\\ \qquad\;\; x_2 + 2x_3 = -1.\end{cases}$

Пусть $x_3 = C$, $C \in \mathbb{R}$, тогда из последнего уравнения выразим $x_2 = -1 - 2C$. Теперь найдем x_1 из первого уравнения:

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 \Rightarrow x_1 = -2(-1 - 2C) - 3C \Rightarrow x_1 = 2 + C.$$

Общее решение неоднородной системы имеет вид:

$$X_{OH} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 + C\\ -1 - 2C\\ C\end{pmatrix} = \underbrace{C\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}}_{X_{OO}} + \underbrace{\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}}_{X_{ЧН}}, C \in \mathbb{R}.$$

Частное решение исходной неоднородной системы: $X_{ЧН} = \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$,

ФСР соответствующей однородной системы: $X_1 = \begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$.

Проверка:

1) $A \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – верно

2) $A \cdot X_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ – верно

Ответ: $X_{OH} = C\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{R}, X_{ЧН} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ФСР} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$

Пример 5.4. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 29 \\ 10x_1 - 5x_3 - 8x_4 - 5x_5 = -31 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 20 \end{cases}$$

Решение: *Прямой ход.* Выпишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$A|B=\left(\begin{array}{ccccc|c}6&2&-1&2&1&9\\4&3&1&7&4&29\\10&0&-5&-8&-5&-31\\-2&1&2&5&3&20\end{array}\right)\overset{\substack{\text{II-I}\\ \text{III}+\text{IV}\cdot 5}}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c}6&2&-1&2&1&9\\-2&1&2&5&3&20\\0&5&5&17&10&69\\-2&1&2&5&3&20\end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{IV}+\text{II}\cdot(-1)\\ \text{I}+\text{II}\cdot 3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c}0&5&5&17&10&69\\-2&1&2&5&3&20\\0&5&5&17&10&69\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\overset{\text{III}+\text{I}\cdot(-1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c}0&5&5&17&10&69\\-2&1&2&5&3&20\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}-2&1&2&5&3&20\\0&5&5&17&10&69\end{array}\right).$$

Так как $r(A|B)=r(A)=2<n=5$, то система совместная и неопределенная.

Выберем базисный минор: $\begin{vmatrix}-2&1\\0&5\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow$ переменные x_1,x_2 – базисные, а x_3,x_4,x_5 – свободные.

<u>*Обратный ход.*</u> По матрице $\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 2 & 5 & 3 & 20 \\ 0 & 5 & 5 & 17 & 10 & 69 \end{array}\right)$ выпишем систему эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 20 \\ \qquad\quad 5x_2 + 5x_3 + 17x_4 + 10x_5 = 69 \end{cases}.$$

Пусть $x_3 = C_1,\ x_4 = C_2,\ x_5 = C_3$, где $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 = -10 + \dfrac{1}{2}x_2 + x_3 + \dfrac{5}{2}x_4 + \dfrac{3}{2}x_5 \\ x_2 = \dfrac{69}{5} - x_3 - \dfrac{17}{5}x_4 - 2x_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -10 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{69}{5} - C_1 - \dfrac{17}{5}C_2 - 2C_3\right) + C_1 + \dfrac{5}{2}C_2 + \dfrac{3}{2}C_3 \\ x_2 = \dfrac{69}{5} - C_1 - \dfrac{17}{5}C_2 - 2C_3 \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \\ x_5 = C_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$
\begin{cases}
x_1 = -\dfrac{31}{10} + \dfrac{1}{2}C_1 + \dfrac{4}{5}C_2 + \dfrac{1}{2}C_3 \\
x_2 = \dfrac{69}{5} - C_1 - \dfrac{17}{5}C_2 - 2C_3 \\
x_3 = C_1 \\
x_4 = C_2 \\
x_5 = C_3
\end{cases}
$$

$$
X_{OH} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{C_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_{OO}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{31}{10} \\ \frac{69}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_{ЧН}}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.
$$

$$\text{ФСР} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Проверка:

1) $$A \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 4 \\ 10 & 0 & -5 & -8 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

2) $$A \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 4 \\ 10 & 0 & -5 & -8 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

3) $$A \cdot X_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 4 \\ 10 & 0 & -5 & -8 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частное решение: $X_{ЧН} = \begin{pmatrix} -\frac{31}{10} \\ \frac{69}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$\text{Проверка: } A\cdot X_{ЧН}=\begin{pmatrix}6&2&-1&2&1\\4&3&1&7&4\\10&0&-5&-8&-5\\-2&1&2&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{31}{10}\\\frac{69}{5}\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\29\\-31\\20\end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } X_{ОН}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\underbrace{C_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{17}{5}\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{X_{ОО}}+\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{31}{10}\\\frac{69}{5}\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{X_{ЧН}},C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R},$$

$$X_{ЧН}=\begin{pmatrix}-\frac{31}{10}\\\frac{69}{5}\\0\\0\\0\end{pmatrix},\text{ФСР}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{17}{5}\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти ранг матрицы $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ приведением ее к ступенчатому виду.

2. Найти ранги матриц:

a) $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$

c) $$\begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix}$$

3. Найти ранг матрицы при различных значениях параметра λ:

a) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

4. Найти решение системы линейных уравнений в зависимости от значений параметра λ. При каких значениях λ система допускает решение с помощью обратной матрицы?

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 - 6x_4 = 4\lambda - 4 \\ x_1 + 7x_2 - 17x_3 + 16x_4 = -3\lambda - 3 \\ -4x_1 + x_2 - 19x_3 + \lambda x_4 = 12\lambda - 12 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 10x_4 = -6\lambda + 5 \end{cases}$$

Примерный вариант контрольной работы №1

Тема 1. *Определители матрицы, матричные уравнения, решение линейных систем методом Крамера и с помощью обратной матрицы.*

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 & 2 \\ 5 & -4 & 7 & 3 \\ 5 & -9 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & -3 \end{vmatrix}.$$

2. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Решить систему уравнений двумя способами: методом Крамера и с помощью обратной матрицы (при нахождении обратной матрицы проверка обязательна):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15 \end{cases}$$

Тема 2. ***Ранг матрицы. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.***

4. Найти общее решение линейной неоднородной системы методом Гаусса (указать ранг матрицы). Выделить общее решение соответствующей однородной системы и частное решение неоднородной системы. Сделать проверку.

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 + 8x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

5. Найти общее решение линейной однородной системы методом Гаусса (указать ранг матрицы системы). Сделать проверку.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ 11x_1 + 17x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Спасибо за внимание!