ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция № 13

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение 13.1. *Поверхностью второго порядка* называется поверхность, общее уравнение которой имеет вид:

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,}$$

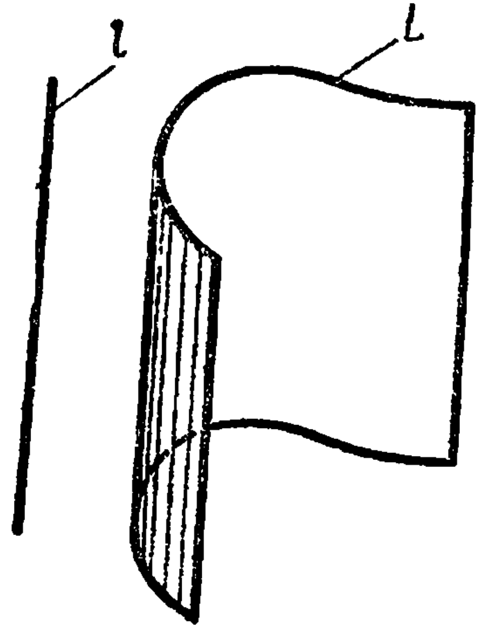
где a_{ij} – произвольно заданные числа, коэффициенты.

Изучать характер изменения поверхности можно методом параллельных сечений: рассматривают линии, получающиеся в сечении поверхности семейством параллельных плоскостей (чаще всего параллельные координатным плоскостям) и, на основании изменения этих сечений, судят о характере изменения (рельефе) поверхности.

Рассмотрим основные виды поверхностей второго порядка и их канонические уравнения.

I. Цилиндрические поверхности

Определение 13.2. Поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию L и параллельных данной прямой l, называется *цилиндрической поверхностью*. Линия L называется *направляющей*, а каждая из прямых, параллельных прямой l – *образующей* цилиндрической поверхности.

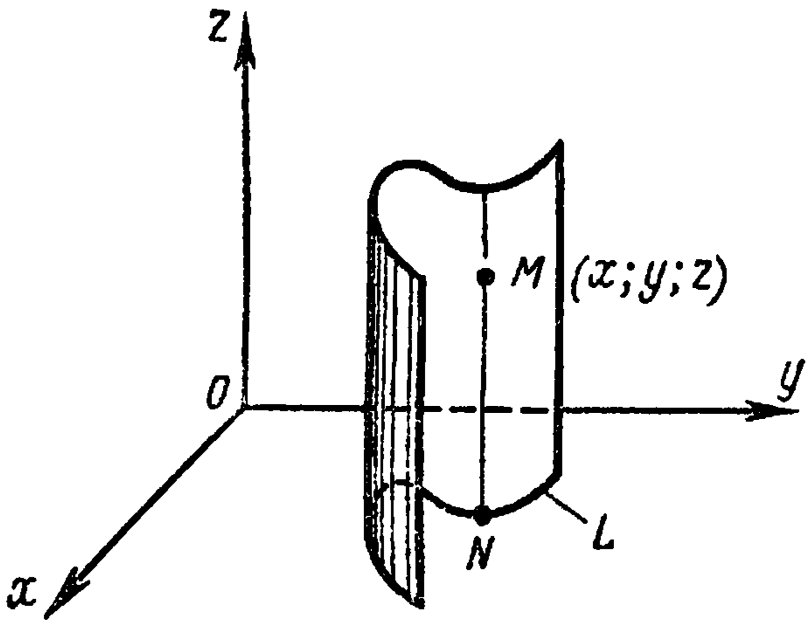


Будем рассматривать только цилиндрические поверхности с направляющими, лежащими в одной из координатных плоскостей и образующими, перпендикулярными этой плоскости.

Можно показать, что уравнение $F(x;y)=0$, не содержащее переменной z, в пространстве $Oxyz$ является уравнением цилиндрической поверхности с образующими параллельными оси Oz и направляющей L, которая в плоскости Oxy задается тем же уравнением $F(x;y)=0$.

Замечание 13.1. В пространстве $Oxyz$ направляющая L определяется системой уравнений: $\begin{cases} F(x;y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

Уравнение $F(x;z)=0$, не содержащее y, и уравнение $F(y;z)=0$, не содержащее x, определяют в пространстве $Oxyz$ цилиндрические поверхности с образующими, параллельными соответственно осям Oy и Ox.

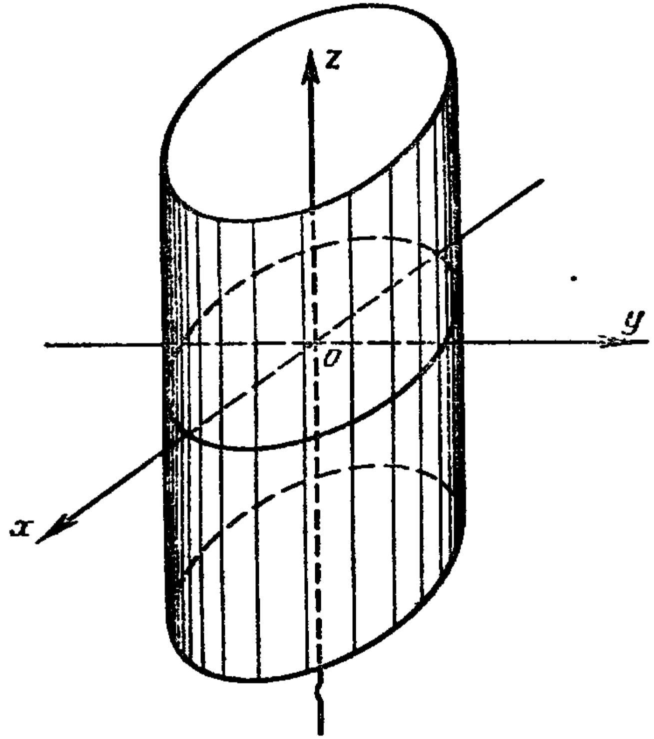


Примеры цилиндрических поверхностей:

1. *Эллиптический цилиндр* – поверхность, определяемая в пространстве каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ее образующие параллельны оси Oz, а направляющей является эллипс с полуосями a и b, лежащий в плоскости Oxy.



В частности, если $a=b$, то направляющей является окружность, а поверхность является прямым круговым цилиндром: $x^2+y^2=a^2$.

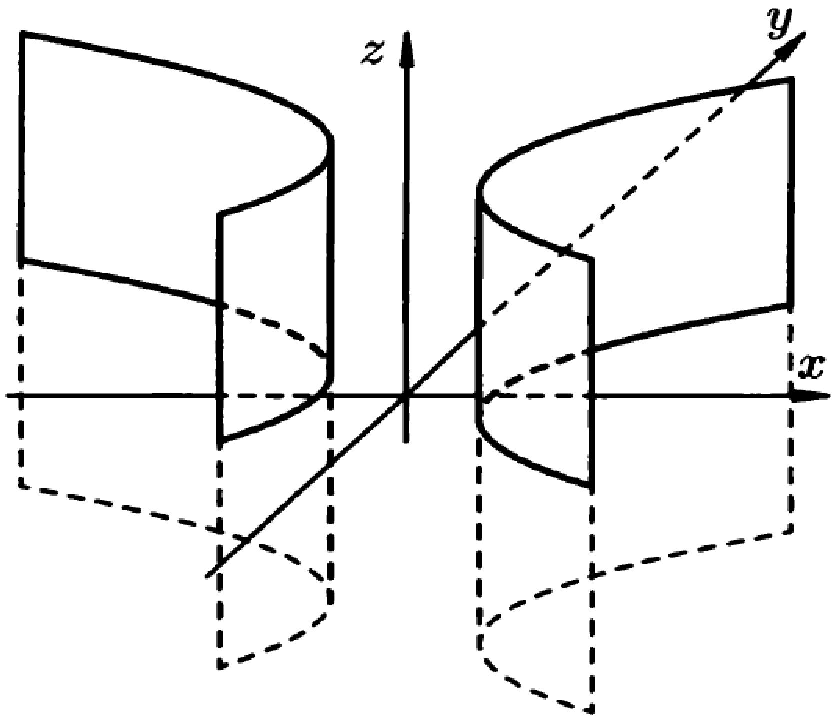
Уравнения вида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ и $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$

также определяют эллиптические цилиндры.

2. *Гиперболический цилиндр* – поверхность, определяемая каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

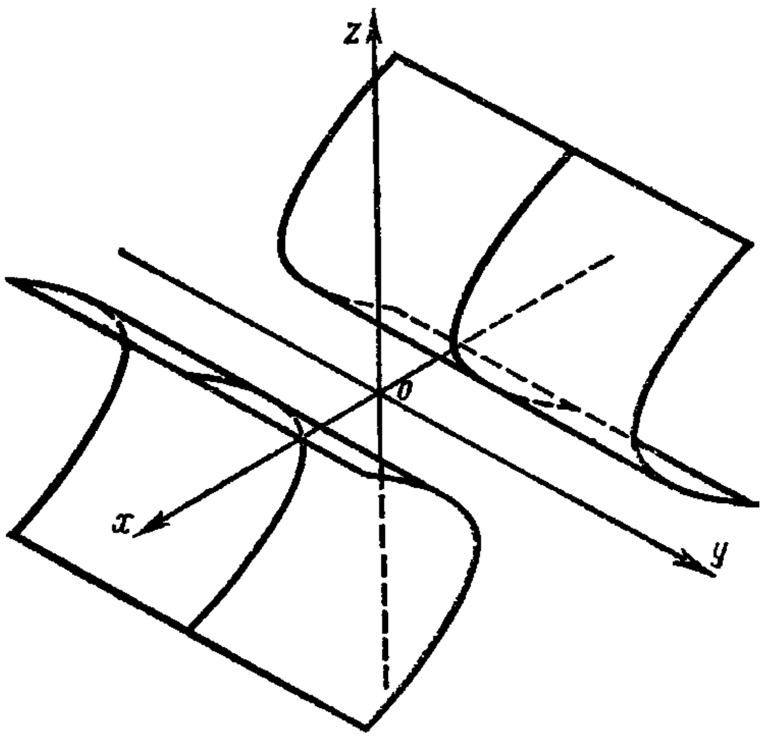
Образующие этой поверхности параллельны оси Oz, а направляющей служит расположенная в плоскости Oxy гипербола с действительной полуосью a и мнимой полуосью b.



Уравнения вида: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$

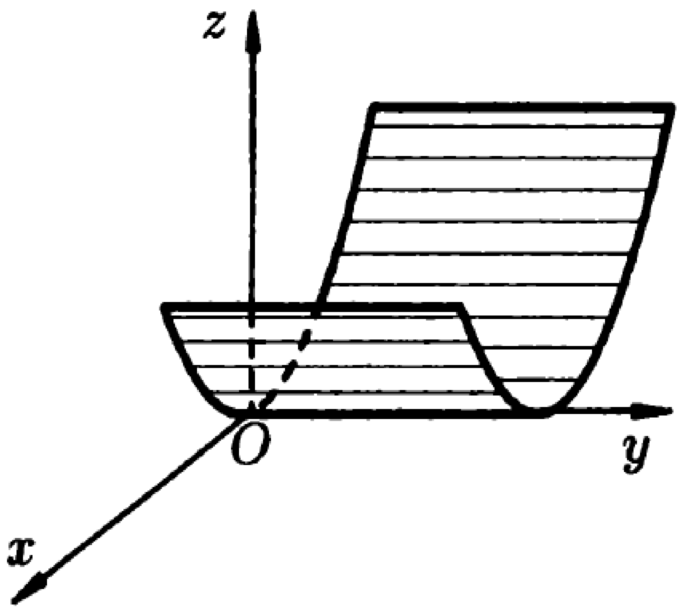
также определяют гиперболические цилиндры.

Задача 13.1. Записать каноническое уравнение поверхности, изображенной на рисунке:



3. *Параболический цилиндр* – поверхность, определяемая каноническим уравнением:

$$x^2 = 2pz.$$



Ее направляющей является парабола, лежащая в плоскости Oxz, а образующие параллельны оси Oy.

Задача 13.2. Записать каноническое уравнение поверхности, изображенной на рисунке 2.

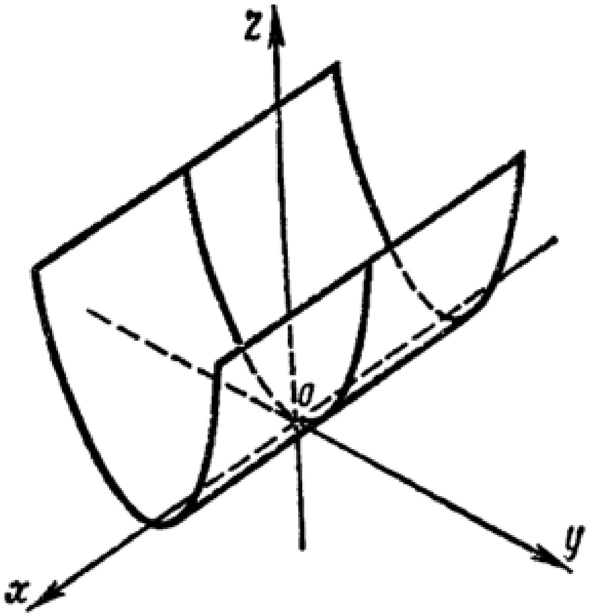
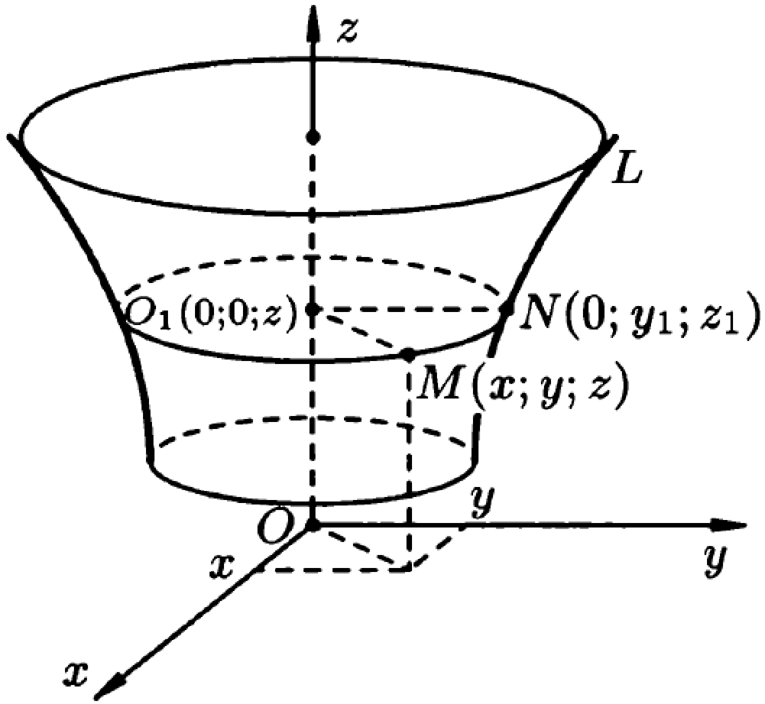


Рис.2

II. Поверхности вращения



Пусть линия L, лежащая в плоскости Oyz задана уравнениями: $\begin{cases} x = 0, \\ F(y,z) = 0. \end{cases}$

Рассмотрим поверхность, образованную вращением этой линии вокруг оси Oz. Эта поверхность называется поверхностью вращения.

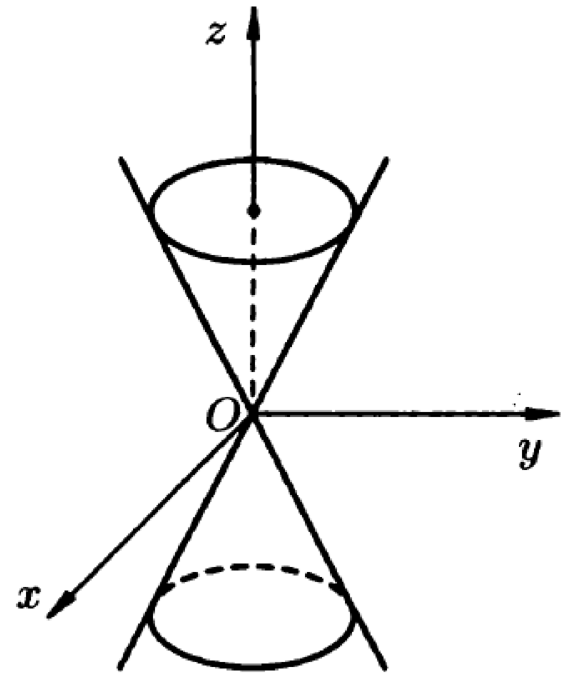
Можно показать, что координаты любой точки $M(x;y;z)$, лежащей на поверхности, удовлетворяют уравнению $F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$, а координаты точек, не лежащих на этой поверхности, данному уравнению не удовлетворяют.

Уравнение:

$$\boxed{F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0}$$

является уравнением поверхности вращения вокруг оси Oz линии L, определяемой уравнениями: $\begin{cases} x = 0 \\ F(y,z) = 0 \end{cases}$.

Замечание 13.2. Кривая L может быть задана и в другой координатной плоскости и может вращаться относительно другой координатной оси.

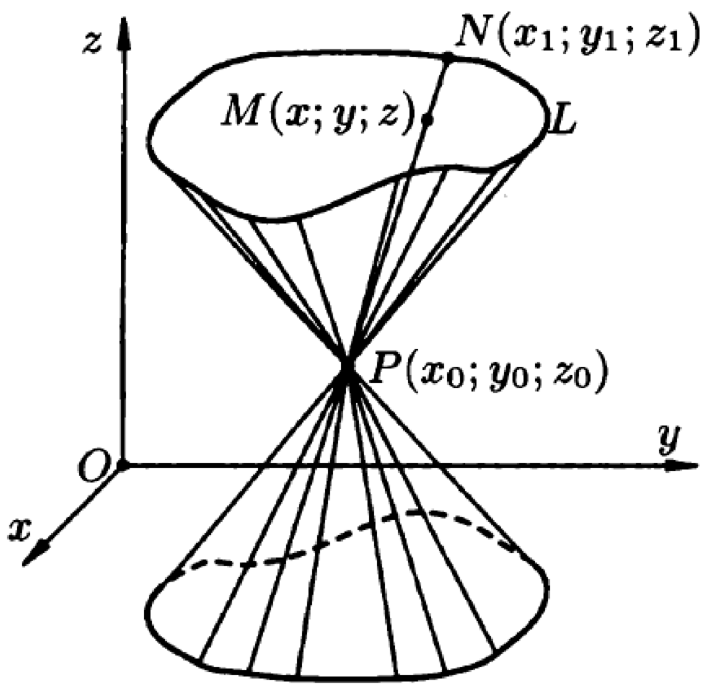


Вращая прямую $y = z$ вокруг оси Oz, получим поверхность вращения, которая называется *конусом второго порядка*. Его уравнение имеет вид:

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = z \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

1. Конические поверхности

Определение 13.3. Поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих линию L и проходящих через данную точку P, называется *коническойповерхностью*. При этом линия L называется *направляющей* конической поверхности, точка P – ее *вершиной*, а каждая из прямых, составляющих коническую поверхность – *образующей*.



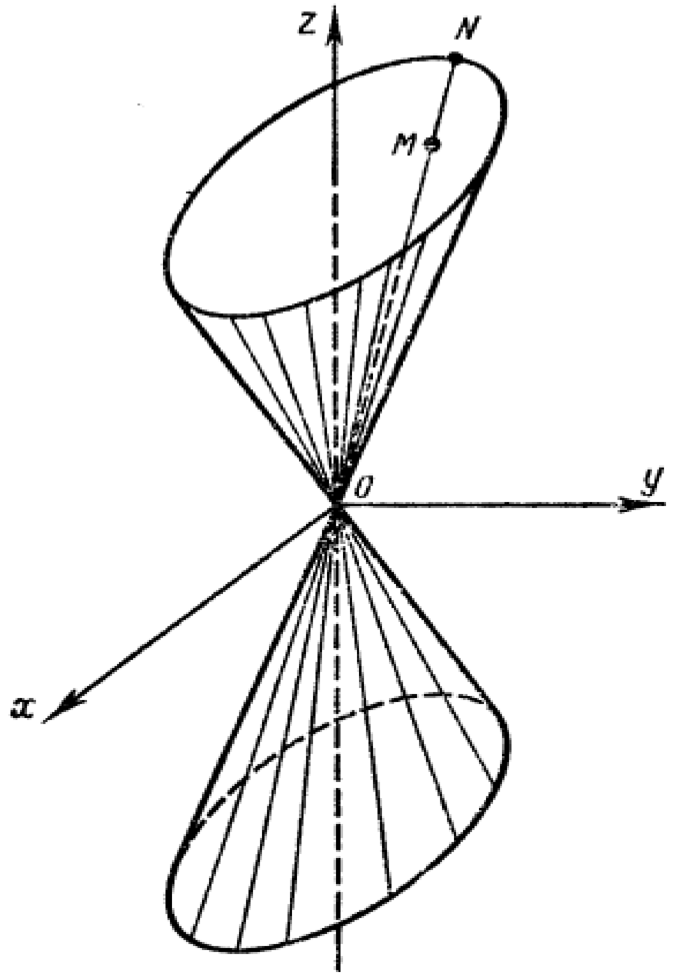
Рассмотрим коническую поверхность с вершиной в начале координат, для которой направляющей является эллипс: $\begin{cases} Z = c \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ с полуосями a и b, лежащий в плоскости $Z = c$.

Эта поверхность является *конусом второго порядка*.

Рассмотрим произвольно выбранную точку $M(x; y; z)$ конической поверхности и проведем через нее образующую OM, пересекающуюся с направляющей в точке $N(X; Y; c)$. Составим уравнение прямой OM, проходящей через точки $O(0; 0; 0)$ и $N(X; Y; c)$:

$$\frac{x-0}{X-0} = \frac{y-0}{Y-0} = \frac{z-0}{c-0} \quad \text{или} \quad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{c}$$

Тогда $X = cx/z$; $Y = cy/z$. Подставив эти выражения во второе из уравнений системы $\begin{cases} Z = c \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ получим: $\frac{c^2x^2}{a^2z^2} + \frac{c^2y^2}{b^2z^2} = 1 \Rightarrow$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$ – *каноническое уравнение конуса второго порядка*

Если $a=b$, то направляющей является окружность: $\begin{cases} z=c \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$. Тогда поверхность является прямым круговым конусом и его уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,.$$

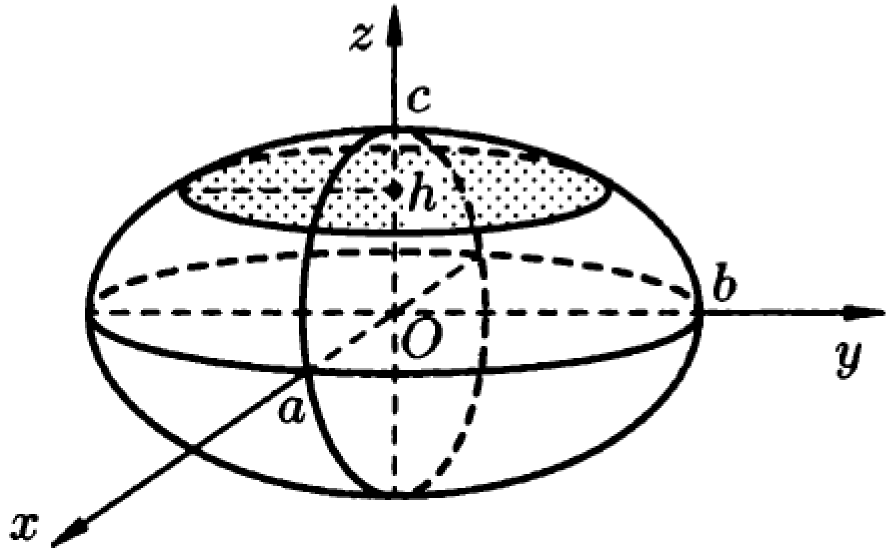
III. Эллипсоид

Определение 13.4. *Эллипсоидом* называется поверхность, определяемая каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Числа a, b и c называются полуосями эллипсоида.

Так как в уравнении текущие координаты входят в четных степенях, то эллипсоид симметричен относительно координатных плоскостей.



Форму эллипсоида будем изучать методом параллельных сечений. Пересечем эллипсоид плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Если пересечь эллипсоид плоскостью $z = h$ $(|h| < c)$, то в сечении получится эллипс:

$$\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$ – каноническое уравнение эллипса с полуосями $\bar{a} =$

$$a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad \bar{b} = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\,.$$

Из этих формул видно, что с возрастанием $|h|$ полуоси эллипса $\bar{a}$ и $\bar{b}$ уменьшаются. При $|h| = c$ имеем $\bar{a} = \bar{b} = 0$, и сечение вырождается в точку.

Аналогично можно показать, что при пересечении эллипсоида плоскостями $x = h$ $(|h| < a)$ и $y = h$ $(|h| < b)$ также получаются эллипсы.

В частном случае, при $a = b$ получаем *эллипсоид вращения*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Если все три полуоси эллипсоида равны между собой: $a = b = c$, то получаем поверхность вращения, которая называется *сферой*:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

IV. Гиперболоиды

1. Однополостный гиперболоид

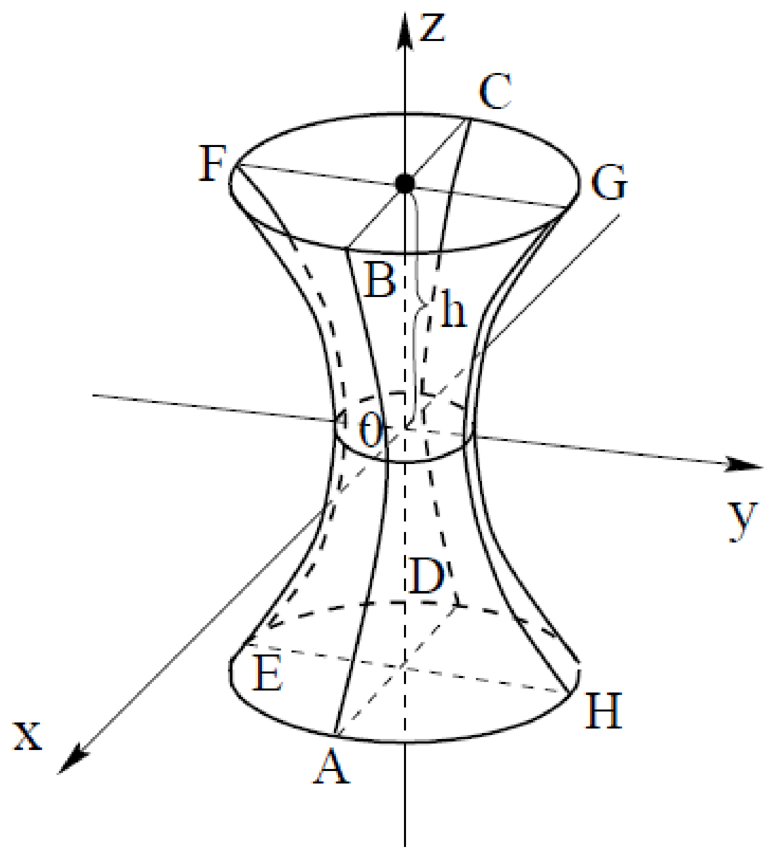
Определение 13.5. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность, определяемая каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Эта поверхность имеет три плоскости симметрии – координатные плоскости, так как текущие координаты x, y и z входят в уравнение в четных степенях.

Пересекая однополостный гиперболоид плоскостью $y = 0$, получим в плоскости Oxz гиперболу $ABCD$: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$

Аналогично, в сечении однополостного гиперболоида плоскостью $x = 0$ получится гипербола $EFGH$: $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, лежащая в плоскости Oyz.



При пересечении однополостного гиперболоида плоскостью $z = h$ получится эллипс $BFCG$, уравнение которого имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \\ z = h \end{cases}$$

Полуоси этого эллипса: $\bar{a} = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ и $\bar{b} = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ возрастают с возрастанием абсолютной величины h. При $h = 0$ получится эллипс, лежащий в плоскости Oxy и имеющий наименьшие полуоси a и b.

При $a = b$ получим однополостный *гиперболоид вращения*: $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. При пересечении его плоскостями $z = h$ получаются окружности:

$$\begin{cases} z^2 + y^2 = a^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right), \\ z = h. \end{cases}$$

Замечание 13.3. Однополостный гиперболоид можно также рассматривать как поверхность, составленную из прямых линий.

Рассмотрим прямую, определяемую уравнениями: $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{y}{b}\right). \end{cases}$

в которых a, b и c – полуоси однополостного гиперболоида, а k – произвольно выбранное число ($k \neq 0$).

Перемножая почленно эти уравнения, получим: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$ или

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – уравнение однополостного гиперболоида.

Таким образом, координаты любой точки $M(x; y; z)$, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{y}{b}\right). \end{cases}$$

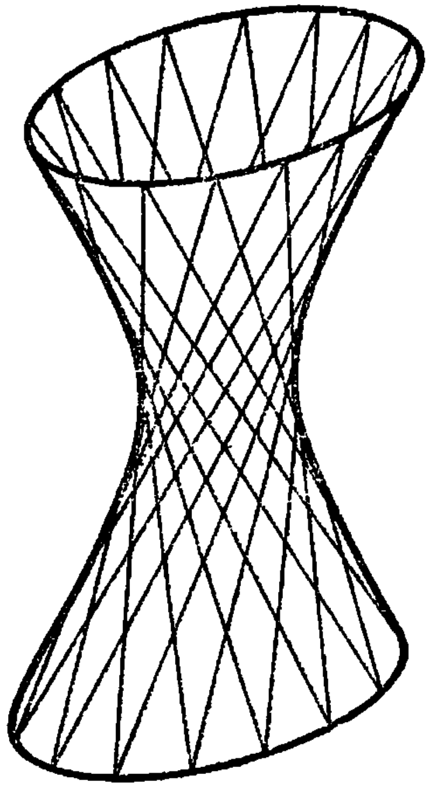
удовлетворяют также и уравнению однополостного гиперболоида.

Таким образом, все точки прямой принадлежат гиперболоиду. Меняя значения k, мы получим целое семейство прямых, лежащих на поверхности.

Аналогично можно показать, что однополостному гиперболоиду принадлежат все прямые семейства:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = l\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{l}\left(1 + \frac{y}{b}\right). \end{cases}$$

где l – произвольный параметр.



Можно также показать, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит по одной прямой каждого из указанных семейств.

Таким образом, однополостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, составленную из прямых линий.

Определение 13.5. Поверхности, составленные из прямых линий, называются *линейчатыми*.

2.Двуполостный гиперболоид

Определение 13.6. *Двуполостным гиперболоидом* называется поверхность, определяемая каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии для двуполостного гиперболоида.

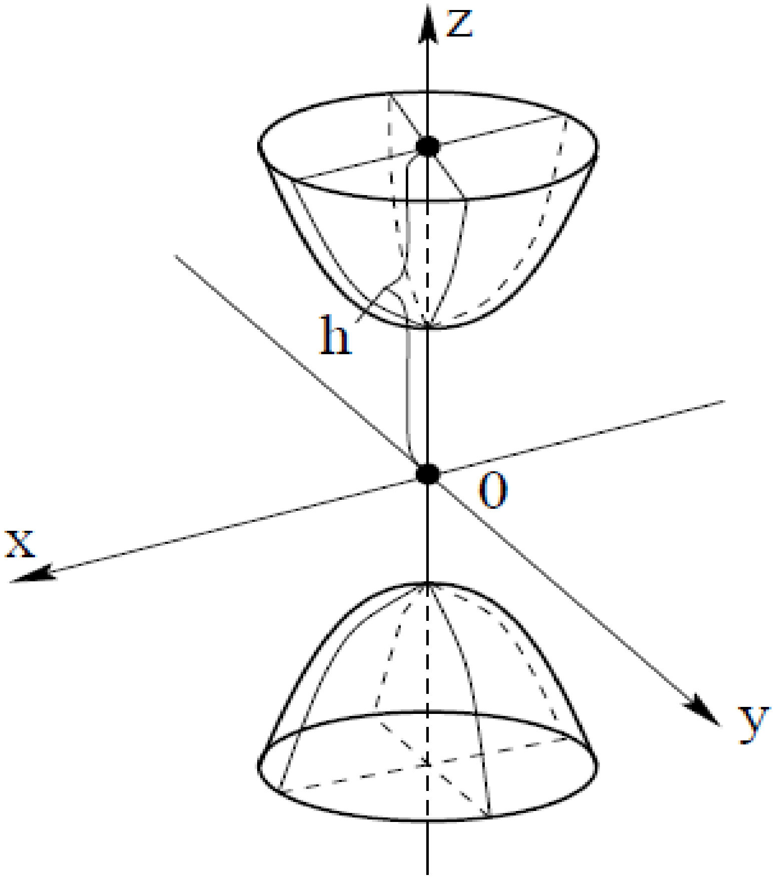
Пересекая эту поверхность координатными плоскостями Oxz и Oyz, получим соответственно гиперболы: $\begin{cases}\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\\ y=0\end{cases}$ и $\begin{cases}\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases}$.

Если двуполостный гиперболоид пересечь плоскостью $z=h$ (при $|h|>c$), то в сечении получится эллипс: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1\\ z=h\end{cases}$ с полуосями $\bar{a}=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ и $\bar{b}=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, возрастающими с возрастанием $|h|$.

При $|h|<c$ поверхность с плоскостью $z=h$, очевидно, не пересекается.

Двуполостный гиперболоид состоит из двух отдельных частей (полостей), чем и объясняется его название.

При $a = b$ уравнение двуполостного гиперболоида имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ или $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1$ и является уравнением двуполостного *гиперболоида вращения*.



В сечении *гиперболоида вращения* плоскостью $z = h$ $(|h| > c)$ получится окружность:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right) \\ z=h \end{cases}$$ радиуса $R = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$.

V. Параболоиды

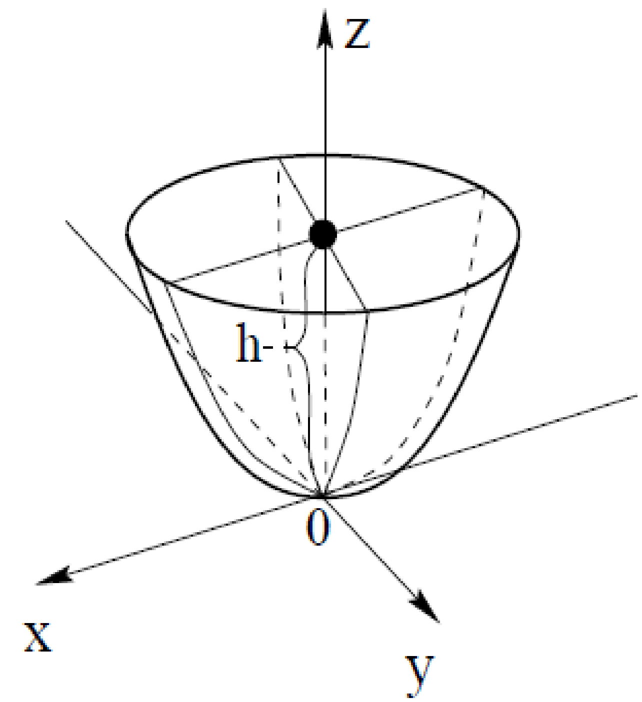
1. Эллиптический параболоид

Определение 13.7. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность, определяемая каноническим уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.}$$

При пересечении эллиптического параболоида координатными плоскостями Oxz и Oyz получатся соответственно параболы: $\begin{cases} x^2 = 2a^2 z \\ y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y^2 = 2b^2 z \\ x = 0 \end{cases}$.

При пересечении плоскостью $z = h$ $(|h| > 0)$ получатся эллипс: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 2h} + \frac{y^2}{b^2 2h} = 1 \\ z = h \end{cases}$ с полуосями $a\sqrt{2h}$ и $b\sqrt{2h}$.



Поскольку x и y входят в уравнение в четных степенях, эллиптический параболоид имеет две плоскости симметрии: Oxz и Oyz.

В случае $a^2 = b^2$ получим *параболоид вращения*.

Пример 13.1. Исследовать форму и расположение поверхности $4 - z = x^2 + y^2$ методом сечений.

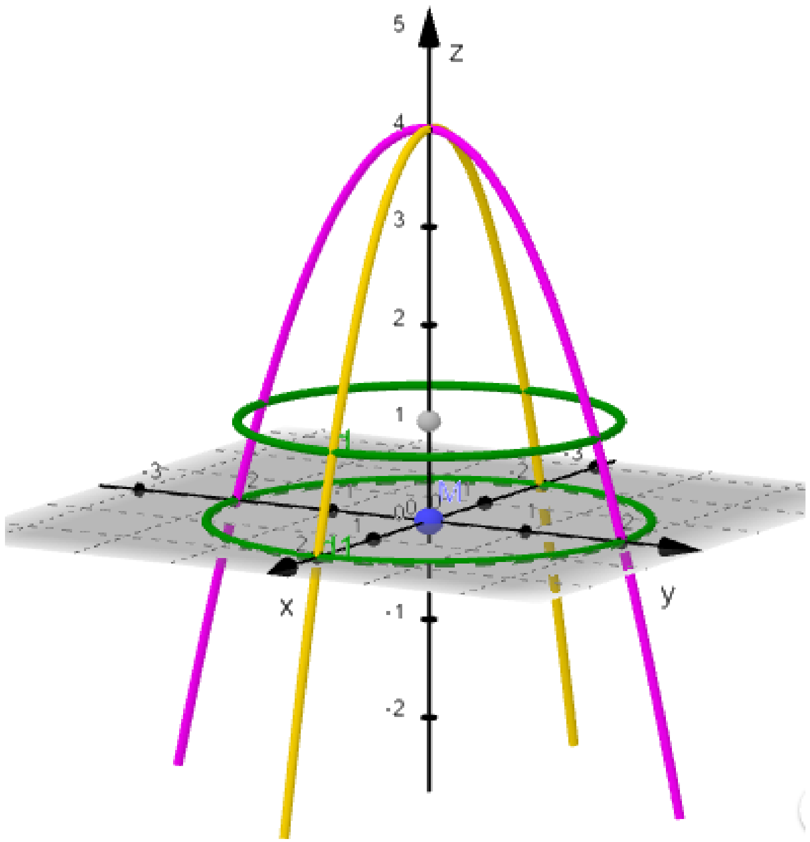
Решение. $x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow 4 - z \geq 0 \Rightarrow z \leq 4$.

В сечении поверхности горизонтальной плоскостью $z = 0$ и $z = h$ получаем:

1) Если $z = 0 \Rightarrow$ окружность $x^2 + y^2 = 4$ с радиуса 2.
2) Если $z = h$: $h < 4 \Rightarrow$ окружность $x^2 + y^2 = 4 - h$; $h = 4 \Rightarrow$ точка $C(0; 0; 4)$; $h > 4 \Rightarrow$ нет пересечения с поверхностью.

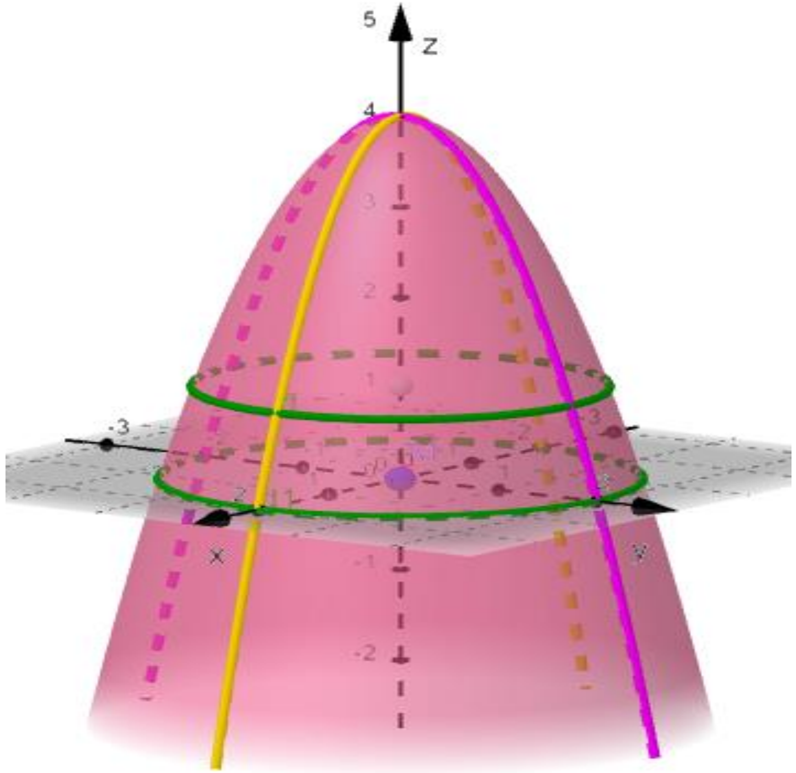
Произведем сечение плоскостью $x = 0$. Сечением является кривая: $y^2 = -(z-4)$ – парабола с центром в точке $C(0;0;4)$, ветви параболы направлены вниз.

Произведем сечение плоскостью $y = 0$. Сечением является кривая: $x^2 = -(z-4)$ – парабола с центром в точке $C(0;0;4)$, ветви параболы направлены вниз.



Исследование методом сечений показало, что данная поверхность является эллиптическим параболоидом с вершиной в точке $C(0;0;4)$:

$$x^2 + y^2 = -(z - 4)$$



2. Гиперболический параболоид

Определение 13.8. *Гиперболическим параболоидом* называется поверхность, определяемая каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Пересекая эту поверхность плоскостью Oxz ($y = 0$), получим параболу:

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 z, \\ y = 0. \end{cases}$$

При пересечении гиперболического параболоида плоскостью $x = h$ получится парабола:

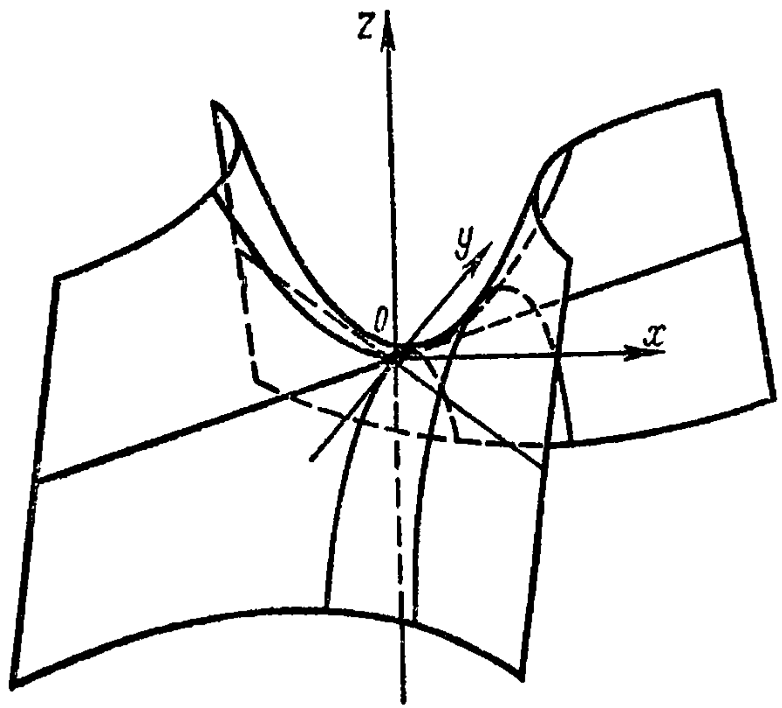
$$\begin{cases} \frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y^2 = -2b^2\left(z - \frac{h^2}{2a^2}\right), \\ x = h. \end{cases}$$

При различных значениях h получится целое семейство парабол, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости Oyz и имеющих одинаковый параметр b^2.

Гиперболический параболоид можно рассматривать как поверхность, описываемую движением любой из этих парабол при условии, что плоскость движущейся параболы остается параллельной плоскости Oyz, ось симметрии параболы остается в плоскости Oxz, а вершина движется по параболе.

Пересекая гиперболический параболоид плоскостью $z = h$, получим (при $h \neq 0$) гиперболу

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h \\ z = h\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\frac{x^2}{2a^2h} - \frac{y^2}{2b^2h} = 1 \\ z = h\end{cases}$$



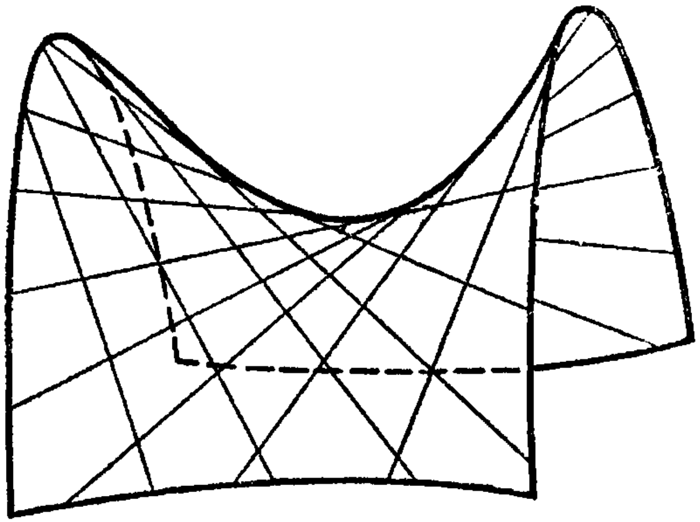
На рисунке показано расположение этой гиперболы для двух случаев: $h > 0$ (верхний край) и $h < 0$ (нижний край).

При $h = 0$, т.е. при пересечении гиперболического параболоида координатной плоскостью Oxy, получится линия, уравнение которой в плоскости Oxy имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. Это уравнение равносильно системе двух уравнений: $\begin{cases}\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.\end{cases}$

Следовательно, гиперболический параболоид пересекается с плоскостью Oxy по двум прямым, лежащим в плоскости Oxy и проходящим через начало координат:

$$\begin{cases}\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0.\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0.\end{cases}$$

Кроме этих двух прямых, существуют и другие прямые, полностью лежащие на гиперболическом параболоиде.

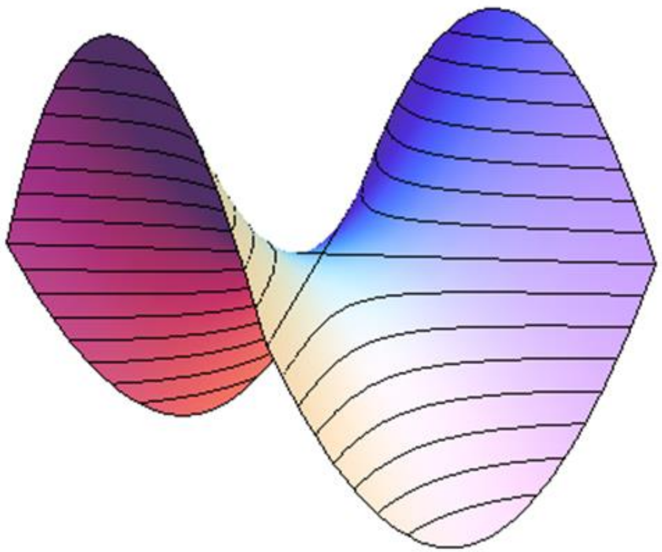


Более того, как и в случае однополостного гиперболоида, можно показать, что через каждую точку гиперболического параболоида проходит по одной прямой каждого из двух семейств прямых:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2kz \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{k} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{l} \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2lz \end{cases}$$

где k и l – произвольные параметры.

Замечание 13.4. Гиперболический параболоид можно рассматривать как поверхность, составленную из прямых линий.



Цилиндрические и конические поверхности, а также однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид являются линейчатыми поверхностями.

Кроме рассмотренных поверхностей, других видов поверхностей второго порядка нет (за исключением отдельных вырожденных случаев). Например, плоскость, пара плоскостей или даже одна точка формально могут быть заданы как поверхности второго порядка.

Произвольное уравнение второго порядка всегда приводится к уравнению (за исключением отдельных вырожденных случаев) одного из указанных канонических видов, относительно «новых» (отличных от x, y, z) декартовых координат.

Пример 13.2. Определить тип поверхности и сделать чертеж:

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0\ .$$

Решение. По каждой переменной выделяем полный квадрат:

$$(x-1)^2 - (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1\ .$$

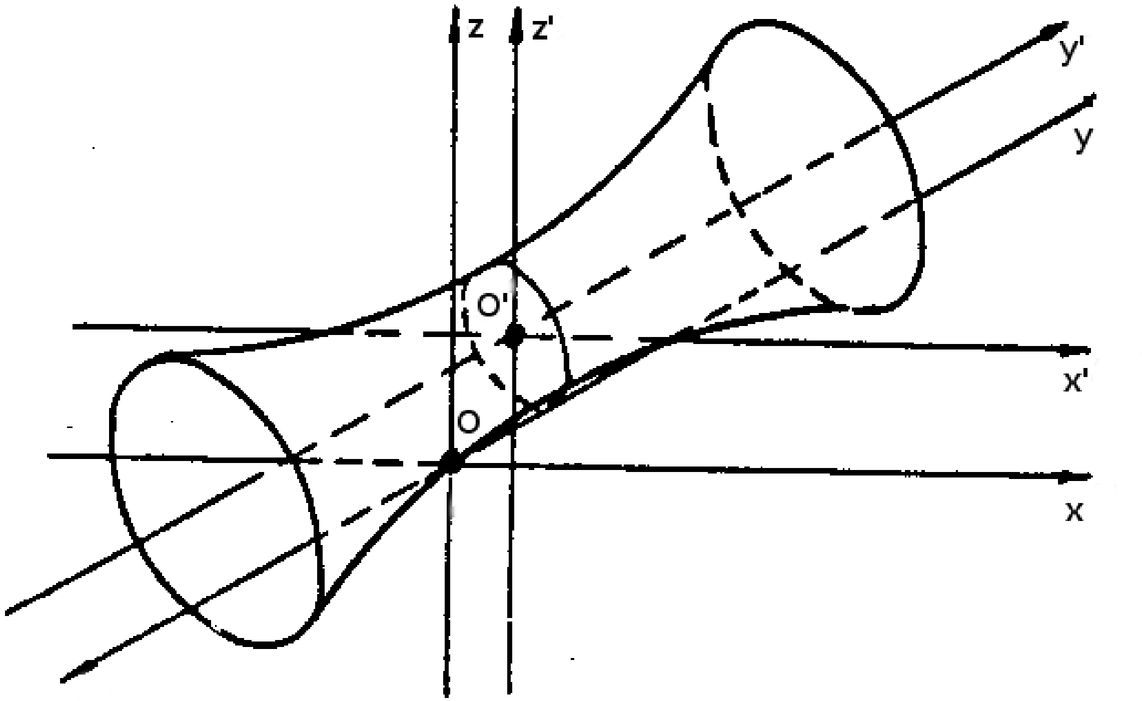
Получили уравнение смещённого однополостного гиперболоида с центром в точке $O'(1;2;1)$ и полуосями $a = b = c = 1$.

Каноническое уравнение получается путём параллельного переноса системы координат $x' = x - 1$, $y' = y - 2$, $z' = z - 1$ и имеет вид:

$$(x')^2 - (y')^2 + (z')^2 = 1\ .$$

Сечения:

1) $y' = 0$ $(y = 2) \Rightarrow$ окружность $(x')^2 + (z')^2 = 1$;
2) $x' = 0$ $(x = 1) \Rightarrow$ гипербола $(z')^2 - (y')^2 = 1$;
3) $z' = 0$ $(z = 1)$ $\Rightarrow$ гипербола $(x')^2 - (y')^2 = 1$.



Пример 13.3. Найти наименьшее целое значение параметра a, при котором данное уравнение $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2x + 12y + 4z + a = 0$ будет задавать двуполостный гиперболоид.

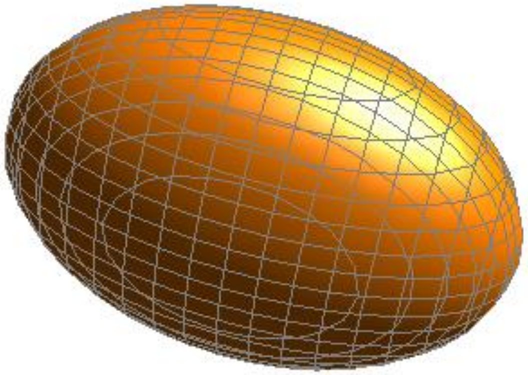
Решение. Выделим полные квадраты по переменным x, y, z:

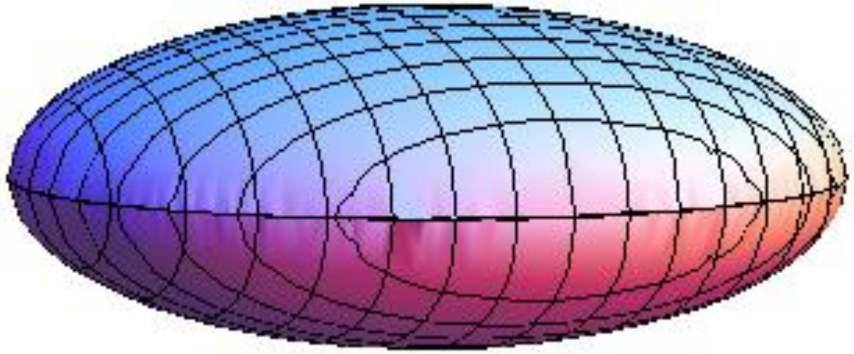
$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + 2(y^2 + 6y + 9) - 18 - (z^2 - 4z + 4) + 4 + \ a = 0$$
$$(x - 1)^2 + 2(y + 3)^2 - (z - 2)^2 = 15 - a$$

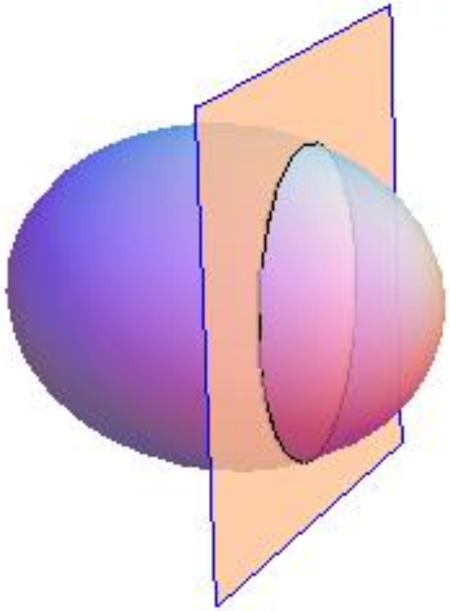
$15 - a < 0 \ \Rightarrow a > 15$ и $a = 16$ – наименьшее целое значение параметра a.

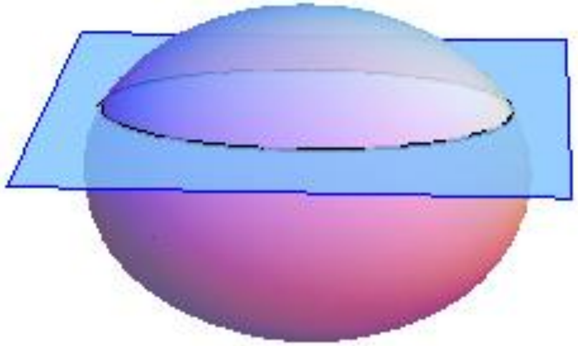
Ответ. $a = 16$.

Эллипсоиды и их сечения

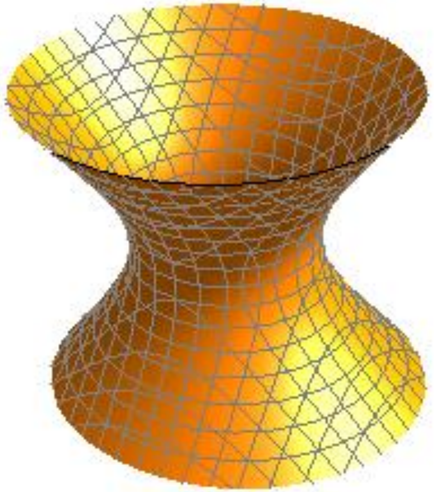


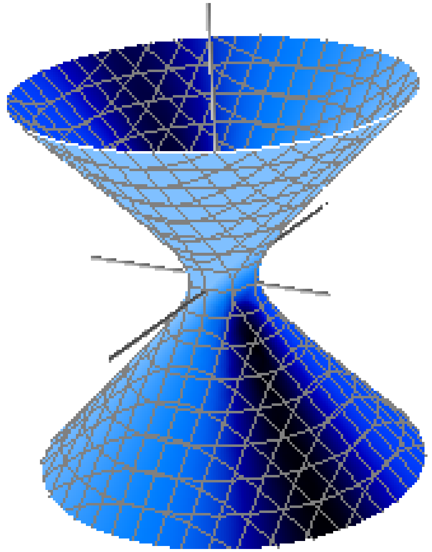


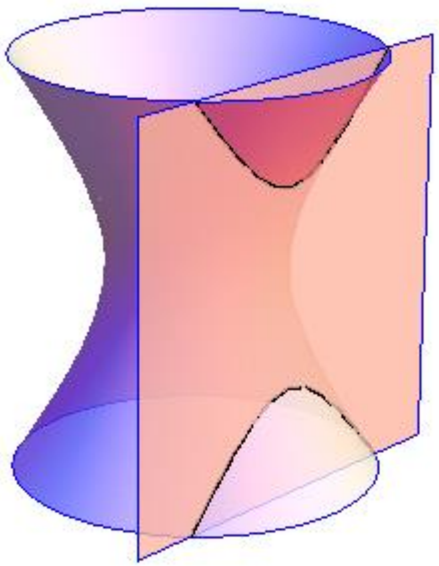


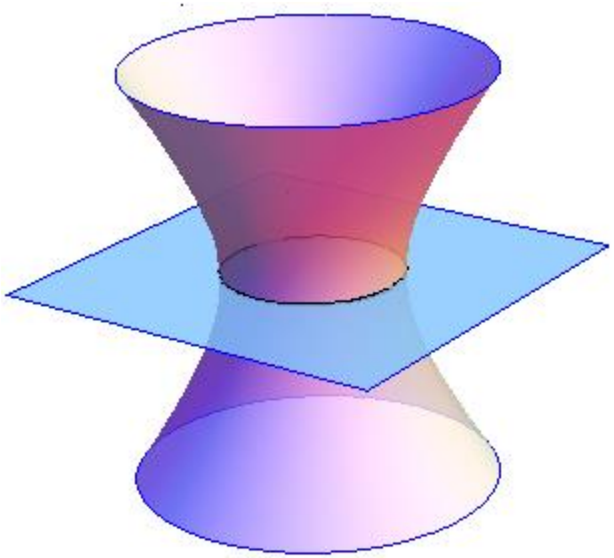


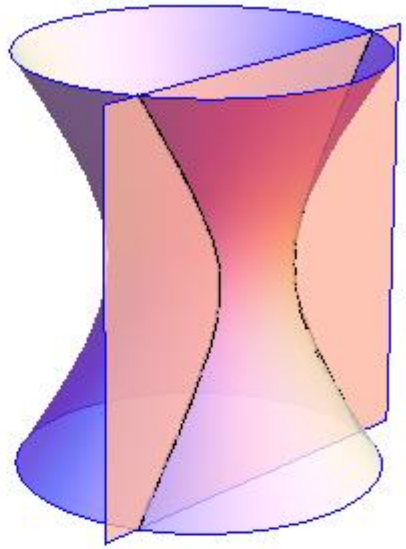
Однополостные гиперболоиды и их сечения



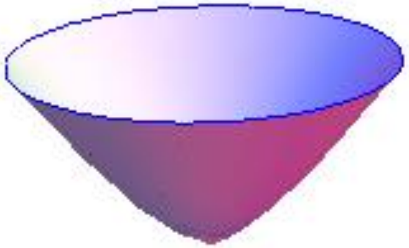


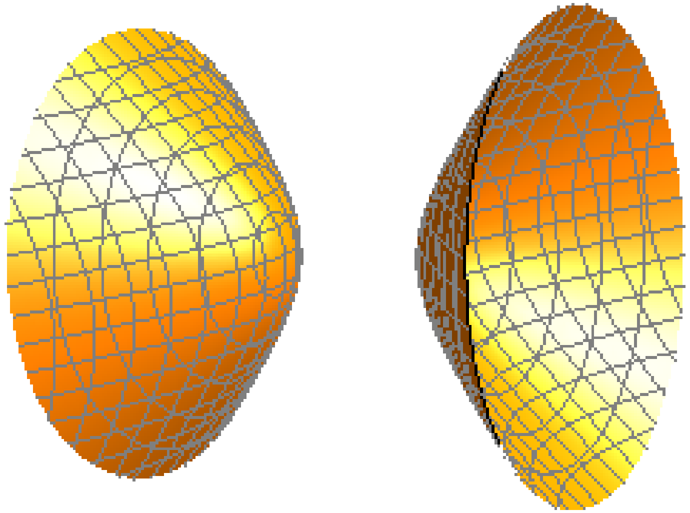


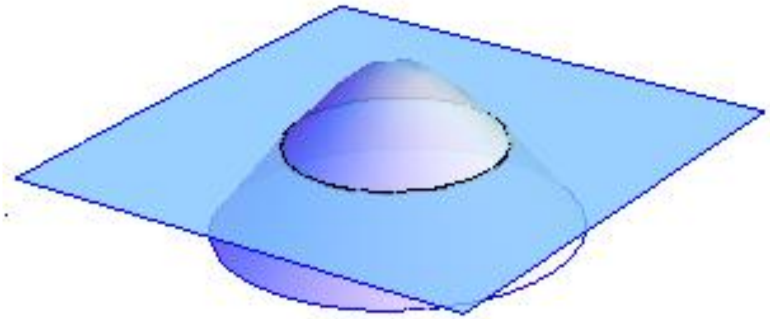


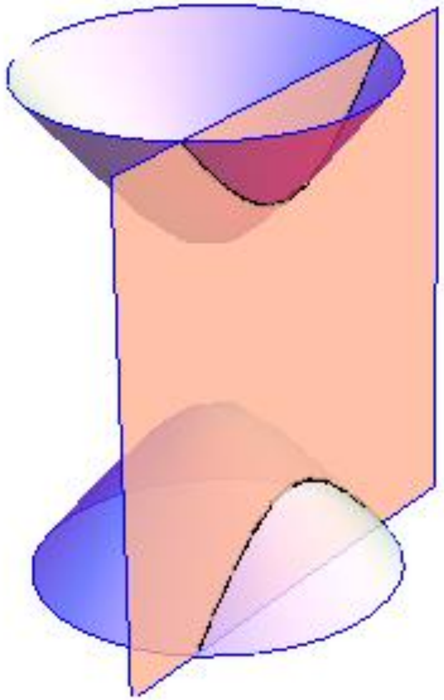


Двуполостные гиперболоиды и их сечения

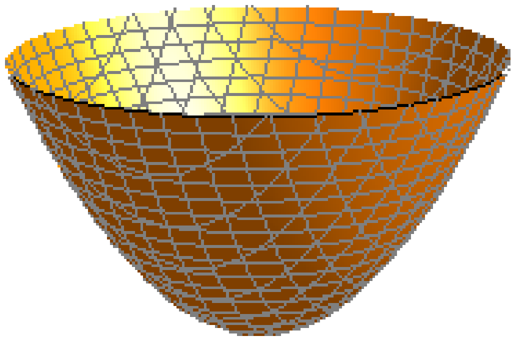


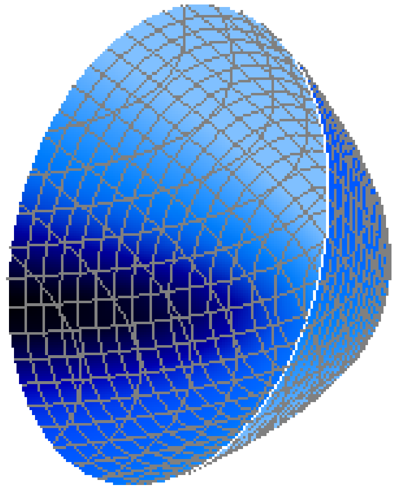


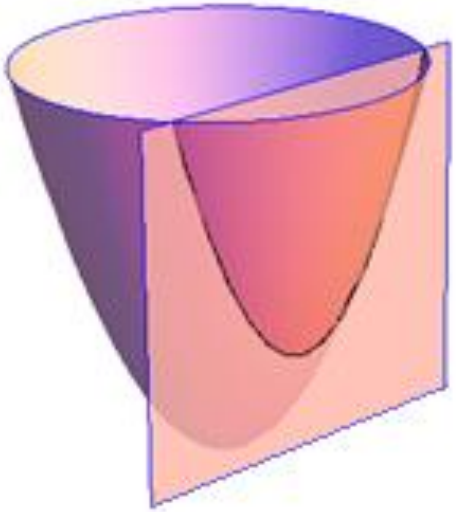


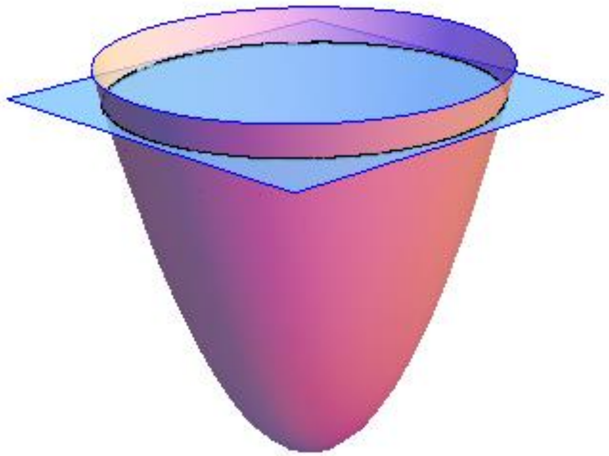


Эллиптические параболоиды и их сечения

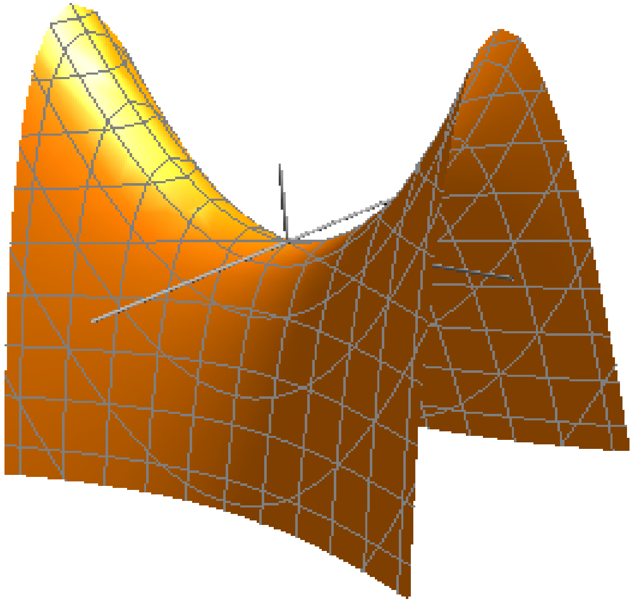


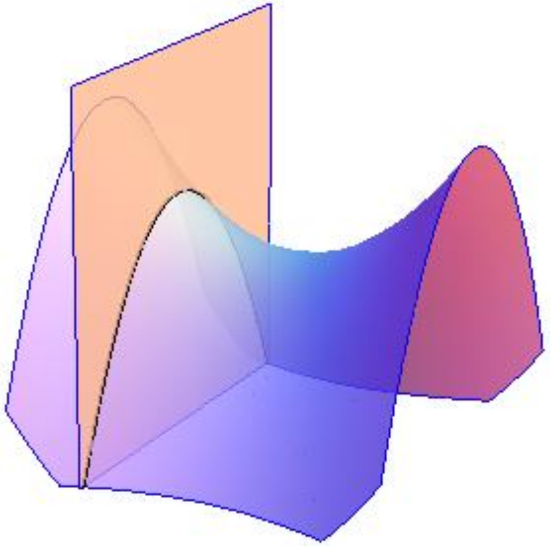


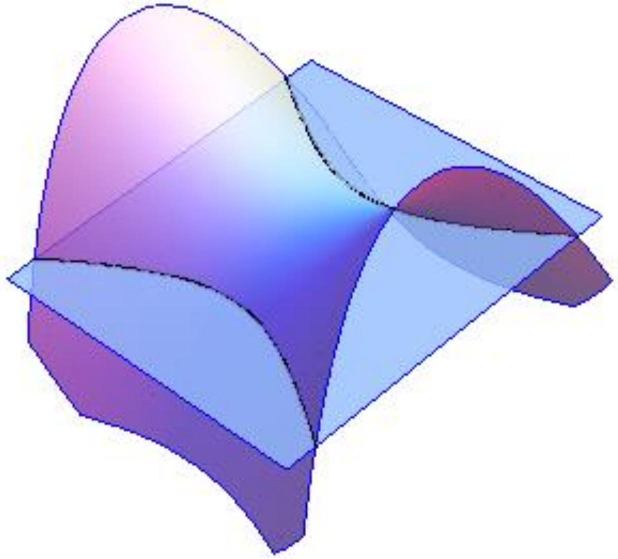


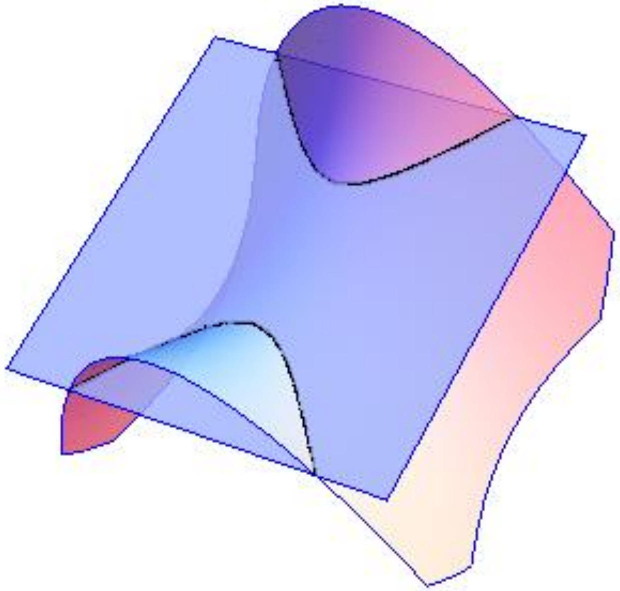


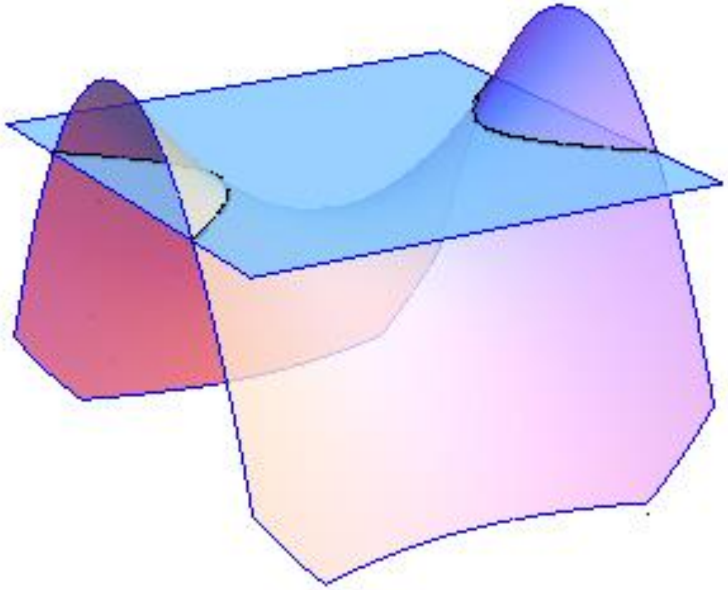
Гиперболические параболоиды и их сечения

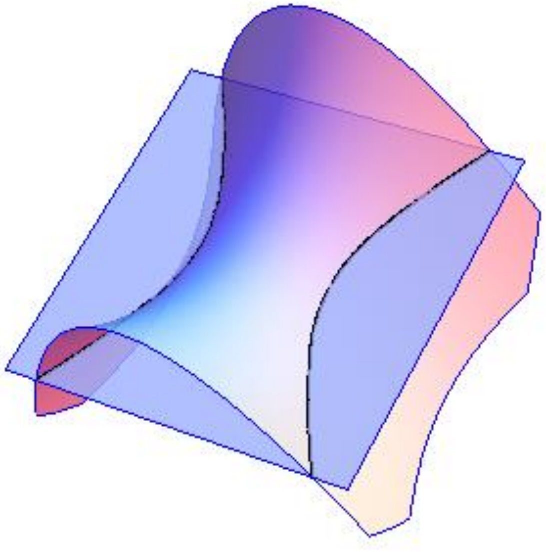




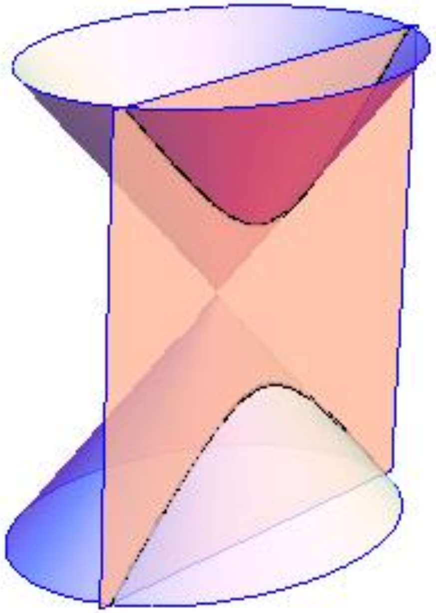


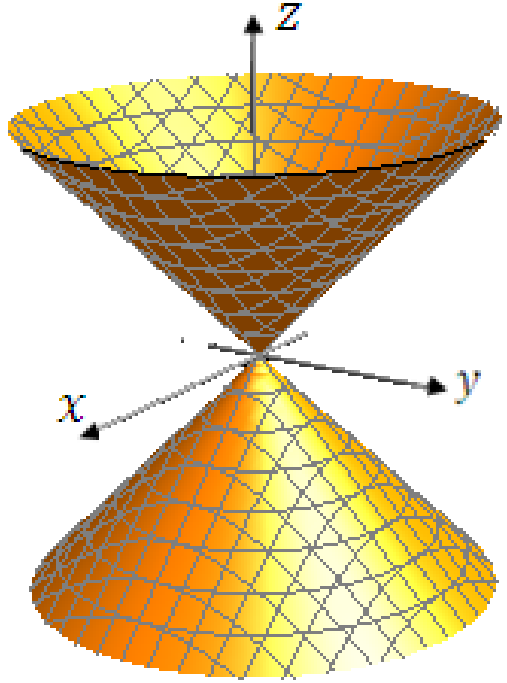


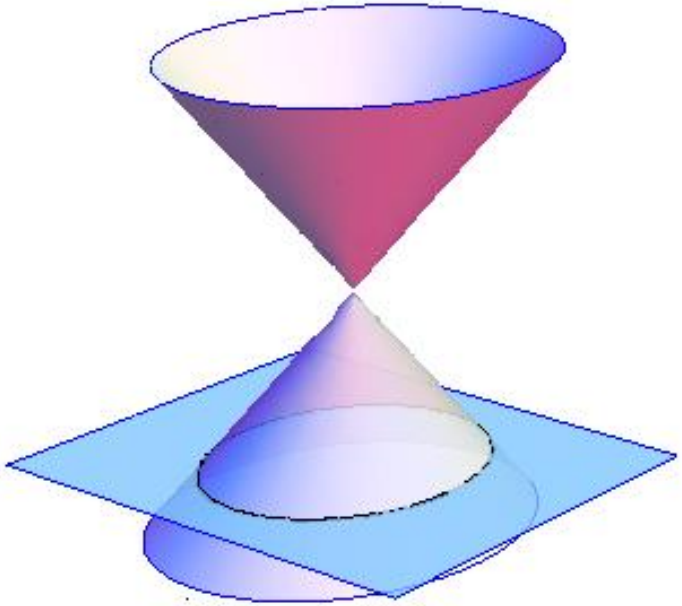


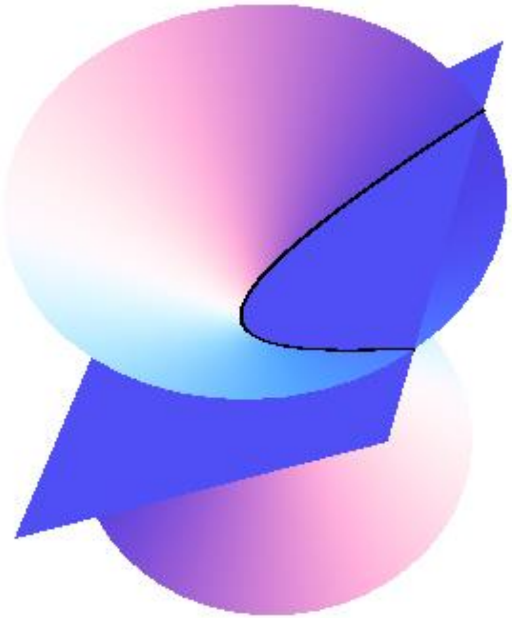


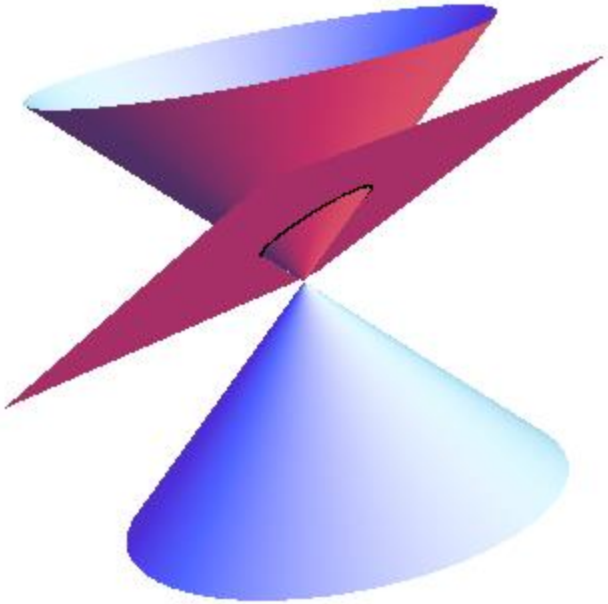
Конусы и их сечения

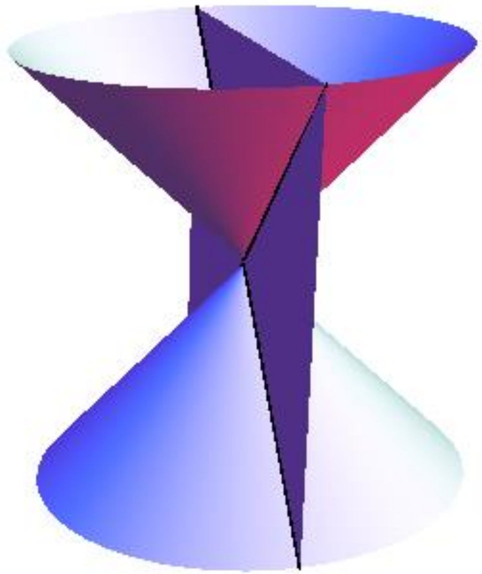












Задачи для самостоятельного решения

1. Уравнение поверхности второго порядка

$$9x^2 + 4y^2 - z^2 - 18x + 16y - 11 = 0$$

привести к каноническому виду. Определить тип поверхности и сделать чертеж. Установить по одну или по разные стороны от поверхности находятся точки $A(5,1,0)$ и $B(1,0,9)$?

2. Уравнение поверхности $x^2 - 16y^2 - 4z^2 + 6x + 40z - 107 = 0$ привести к каноническому виду. Определить тип поверхности и сделать чертеж. Найти сечения поверхности координатными плоскостями.

3. Определить тип поверхности второго порядка

$$x^2 + 16y^2 + 4z^2 + 6x - 40z + 93 = 0.$$

Найти сечения поверхности координатными плоскостями.

4. Найти точки пересечения поверхности с прямой:

а) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$;

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

5. Определить тип поверхности:

$$9x^2+4y^2-36z^2-18x+16y+216z-335=0$$

и найти точки пересечения этой поверхности с прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}$.

6. Установить, какие кривые определяются следующими уравнениями:

a) $\begin{cases} \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=2z \\ 3x-y+6z-14=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z \\ x-2y+2=0 \end{cases}$

Спасибо за внимание!