ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

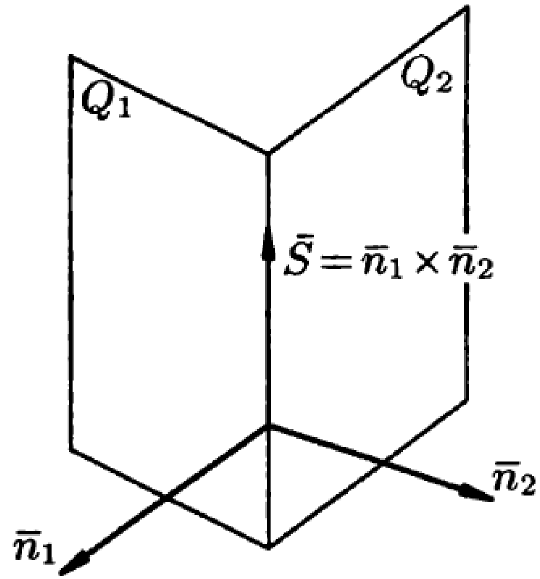
e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция № 11

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

- Прямая как линия пересечения плоскостей
- Параметрические и канонические уравнения прямой
- Уравнение прямой, проходящей через две различные точки
- Угол между прямыми. Взаимное расположение двух прямых
- Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости
- Угол между прямой и плоскостью
- Пересечение прямой и плоскости
- Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми.
- Пучок плоскостей

11.1. Способы задания прямой в пространстве



1) Прямую в пространстве можно задать как пересечение двух плоскостей, системой (11.1) в векторной форме или системой (11.2) в координатной:

$$\begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{n}_1 + D_1 = 0, \\ \vec{r} \cdot \vec{n}_2 + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (11.1)$$

$$\boxed{\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (11.2)}$$

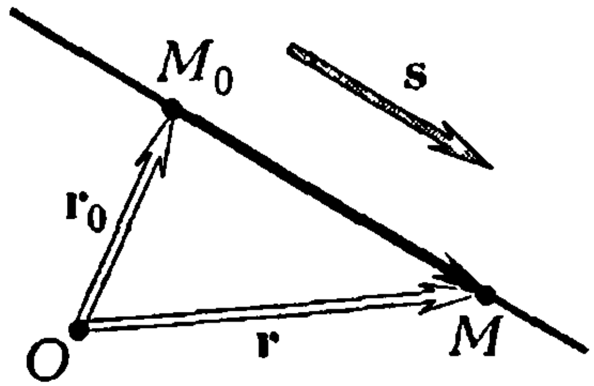
Если эти плоскости не параллельны, т.е. их нормальные векторы: $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не коллинеарны, то системы (11.1) и (11.2) определяют единственную прямую.

Систему (11.2) называют общими уравнениями прямой в пространстве.

2) Прямую в пространстве можно задать, определив принадлежащую ей точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\vec{s} = (m; n; p)$, параллельный этой прямой. Вектор $\vec{s}$ называется направляющим вектором прямой.

Для произвольной точки $M(x;y;z)$ прямой l имеем:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}.$$



Вектор $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = \vec{s} \cdot t$, где параметр $t \in (-\infty;+\infty)$. Обозначая радиус-векторы точек M_0 и M соответственно $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ и $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, получаем:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s} \qquad (11.3)$$

Уравнение (11.3) называется векторным уравнением прямой в пространстве.

Здесь каждому значению параметра t соответствует радиус-вектор $\vec{r}$ точки $M \in l$.

Для получения параметрических уравнений прямой представим уравнение (11.3) в координатной форме:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k},$$

$$t\vec{s} = tm\vec{i} + tn\vec{j} + tp\vec{k} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn\,, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + tp \end{cases} \qquad (11.4)$$

(11.4) – параметрические уравнения прямой в пространстве.

При изменении параметра t изменяются координаты x, y, z и точка $M(x; y; z)$ перемещается по прямой.

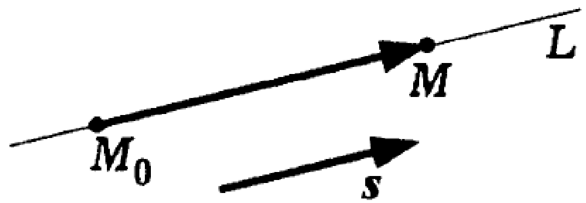
Если задана система вида (11.4), в которой хотя бы один из коэффициентов m, n, p отличен от нуля, то эта система определяет в пространстве прямую.

Чтобы получить канонические уравнения прямой, выразим параметр t из каждого уравнения системы (11.4) и приравняем правые части полученных уравнений: $t = \frac{x-x_0}{m}$, $t = \frac{y-y_0}{n}$, $t = \frac{z-z_0}{p}$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \qquad (11.5)}$$

Уравнения (11.5) – канонические уравнения прямой в пространстве.

Канонические уравнения представляю собой другую форму записи условия коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$, через пропорциональность их координат.



Уравнения (11.5) равносильны системе двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} \\ \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p} \end{cases} \tag{11.6}$$

Равенство $\frac{x-x_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$ является следствием первых двух.

Таким образом, канонические уравнения (11.5) задают прямую пересечением двух плоскостей. Плоскости, задаваемые уравнениями (11.6) обладают особенностями: первая из них параллельна оси *Oz*, вторая – оси *Ox*.

Замечание 11.1. В знаменателе канонических уравнений допускается нулевое значение (одно или два, но не все три).

Например, если направляющий вектор $\vec{s}$ прямой имеет координаты $\vec{s} = (0; n; p)$, то канонические уравнения прямой будут иметь вид:

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \ .$$

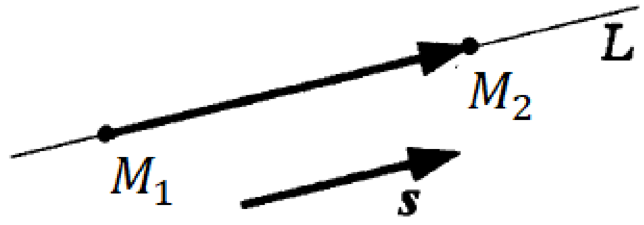
В этом случае $\vec{s} \perp Ox$ и $x = x_0$. Прямая расположена в плоскости $x = x_0$, параллельной координатной плоскости Oyz.

Аналогично, прямая:

$$\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-z_1}{p}$$

параллельна оси *Oz*, т.к. в этом случае $\vec{s} \perp Ox$ и $\vec{s} \perp Oy$ $(x = x_0, y = y_0)$.

3) Прямую в пространстве можно однозначно задать двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащими на этой прямой.



В качестве направляющего вектора, в этом случае, можно выбрать вектор:

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Тогда канонические уравнения прямой, проходящей через две точки, примут вид:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (11.7)}$$

Пример 11.1. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(-1; 2; 6)$ и $B(3; 0; 5)$.

Решение. Воспользуемся формулой (11.7):

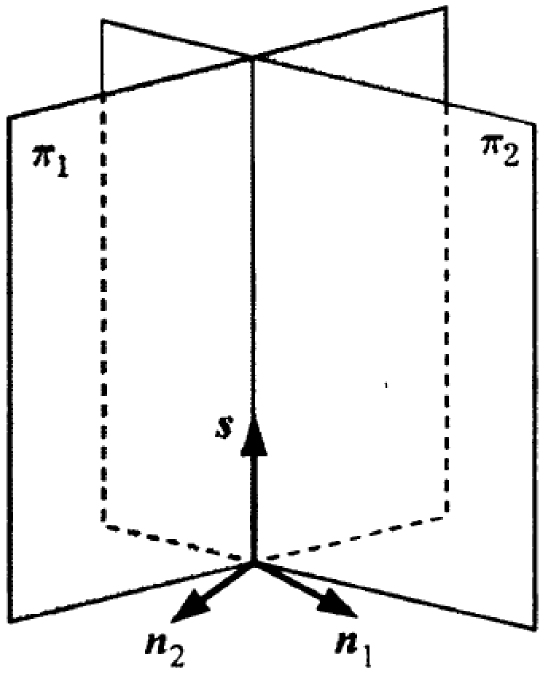
$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \Rightarrow$$

$$\frac{x + 1}{3 + 1} = \frac{y - 2}{0 - 2} = \frac{z - 6}{5 - 6} \Rightarrow$$

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-6}{-1}$$ – канонические уравнения прямой АВ.

Пример 11.2. Привести общие уравнения прямой l к каноническому виду.

$$l:\quad \begin{cases} x-2y+z+5=0, \\ -3x-z+1=0. \end{cases}$$



Решение. Найдем координаты какой-либо точки M_0, принадлежащей прямой l. Для этого одну из координат выберем произвольно.

Пусть $x_0=0 \Rightarrow \begin{cases} -2y+z+5=0, \\ -z+1=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0=3, \\ z_0=1. \end{cases}$

Таким образом, точка $M_0(0;3;1)\in l$ найдена.

В качестве направляющего вектора прямой рассмотрим вектор $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, $\vec{s}\perp\vec{n}_1$ и $\vec{s}\perp\vec{n}_2 \Rightarrow \vec{s}\|l$.

$$\vec{n}_1=\{1;-2;1\},\ \vec{n}_2=\{-3;0;-1\} \Rightarrow$$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k} \Rightarrow \vec{s}=(2;-2;-6).$$

Найдем канонические уравнения прямой l по формуле:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{-6} \quad \text{или} \quad \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{-3}.$$

Пример 11.3. Записать канонические уравнения прямой: $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{-3}$ в параметрическом виде.

Решение. Пусть $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{-3}=t,$ тогда $\begin{cases}\frac{x}{1}=t\\ \frac{y-3}{-1}=t\\ \frac{z-1}{-3}=t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=t\\ y=-t+3\\ z=-3t+1\end{cases}$

$\begin{cases}x=t\\ y=-t+3\\ z=-3t+1\end{cases}$ – параметрические уравнения прямой.

Пример 11.4. Записать общие уравнения прямой, заданной в параметрическом виде: $\begin{cases}x=t\\ y=-t+3\\ z=-3t+1\end{cases}$.

Решение. Запишем параметрические уравнения в каноническом виде:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t + 3 \\ z = -3t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = -y + 3 \\ t = \frac{z-1}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-3} \Rightarrow$$

Выбирая два из трех уравнений, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} \\ \frac{x}{1} = \frac{z-1}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 3x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

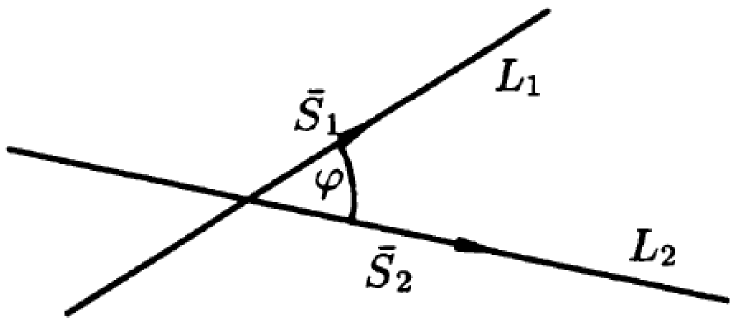
$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 3x + z - 1 = 0 \end{cases}$ – общие уравнения прямой.

11.2. Угол между прямыми в пространстве

Пусть в пространстве даны две прямые:

$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1},$$

$$L_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$



Угол между прямыми вычисляется как острый угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (11.8)$$

Условием перпендикулярности двух прямых является условие перпендикулярности их направляющих векторов $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$:

$$L_1 \perp L_2 \iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (11.9)$$

(11.9) – условие перпендикулярности двух прямых в пространстве.

Взаимное расположение прямых в пространстве:

1) прямые совпадают;

2) прямые параллельны и не совпадают;

3) прямые пересекаются;

4) прямые скрещиваются (не имеют общих точек и непараллельны).

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \ \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \qquad L_2: \ \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

$\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно. Прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, прямая L_2 проходит через точку $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

Если прямые совпадают или параллельны, то их направляющие векторы коллинеарны $\vec{s}_1 \| \vec{s}_2$ и их координаты пропорциональны:

$$L_1 \| L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{11.10}$$

Если прямые совпадают, то направляющим векторам $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ коллинеарен и вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1; z_2 - z_1)$:

$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}. \tag{11.11}$$

Равенство (11.11) означает также, что точка M_2 лежит на прямой L_1.

Условием совпадения прямых в пространстве является выполнение равенств (11.10) и (11.11) одновременно.

Замечание 1.2. Проверить совпадение прямых можно также подстановкой пары точек одной из этих прямых в уравнение другой.

Условием параллельности прямых в пространстве является выполнение только равенства (11.10) и не выполнение (11.11).

Если прямые пересекаются или скрещиваются, то их направляющие векторы неколлинеарны, т.е. условие (11.10) не выполняется.

Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (11.12)$$

(12) – условие принадлежности прямых L_1 и L_2 одной плоскости.

Условие (12) не выполняется, только в случае, когда прямые скрещиваются, т.е. не принадлежат одной плоскости.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (11.13)$$

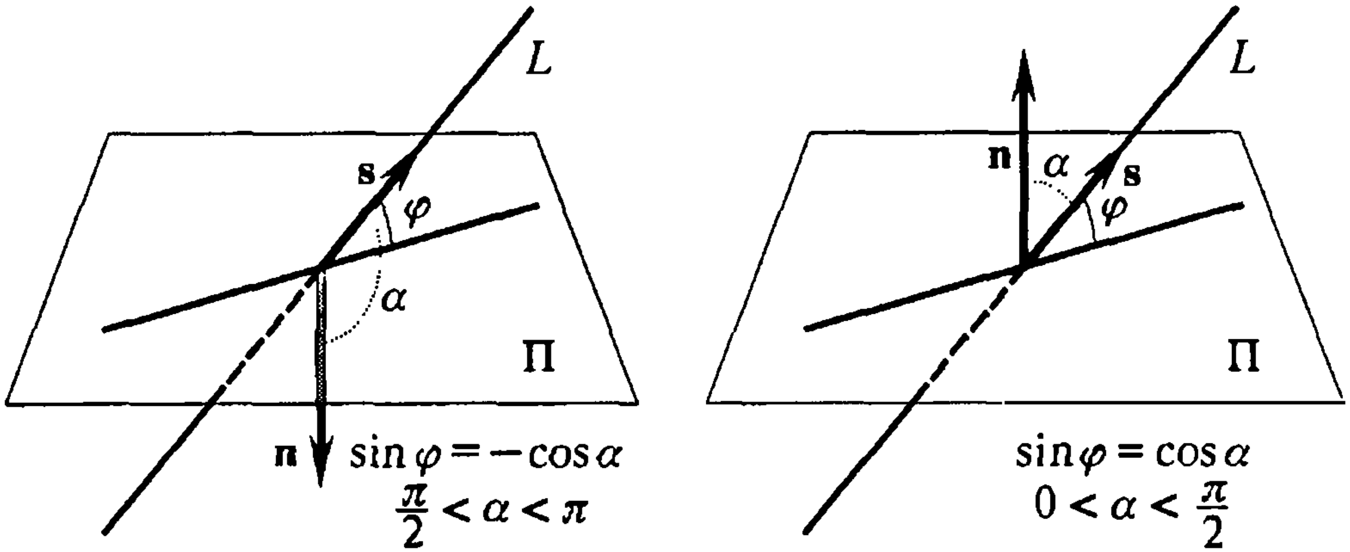
(13) – условие, при котором прямые L_1 и L_2 скрещиваются.

11.3. Угол между прямой и плоскостью. Пересечение прямой и плоскости

Пусть в пространстве даны прямая L и плоскость π:

$$L:\quad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\,, \qquad \pi:\ Ax+By+Cz+D=0\,.$$

Углом между прямой и плоскостью называют любой из двух смежных углов, образованных прямой с ее проекцией на плоскость.



Найдем синус угла φ, через косинус угла α между направляющим вектором $\vec{s}$ прямой и нормальным вектором $\vec{n}$ плоскости.

$$\cos\alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

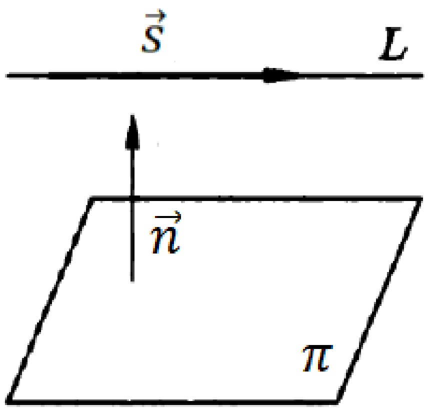
$$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,\ 0 < \alpha < \pi/2,\ \sin\varphi = -\cos\alpha,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

Так как $\sin\varphi = |\cos\alpha|$, то получаем:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (11.14)$$

Условием параллельности прямой и плоскости является условие перпендикулярности направляющего вектора $\vec{s}$ прямой L и нормального вектора $\vec{n}$ плоскости π ($\vec{s} \perp \vec{n}$):

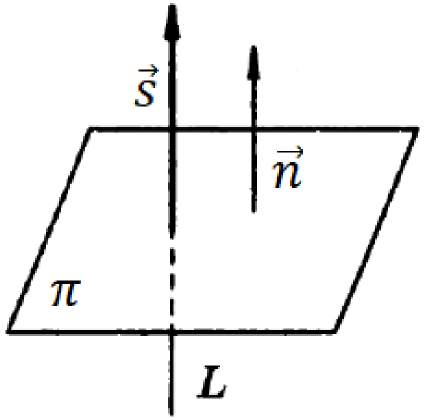
$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (11.15)$$



при условии, что прямая не принадлежит плоскости.

Последнее условие легко проверить подстановкой в уравнение плоскости двух точек прямой.

Условием перпендикулярности прямой и плоскости является условие коллинеарности направляющего вектора $\vec{s}$ прямой L и нормального вектора $\vec{n}$ плоскости π $(\vec{s}\|\vec{n})$:



$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C} \qquad (11.16)$$

Пересечение прямой и плоскости

Найдем координаты точки $P(x_1;y_1;z_1)$ пересечения прямой L и плоскость π, для чего запишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=x_0+tm \\ y=y_0+tn \\ z=z_0+tp \end{cases}$$

Подставив значения x, y, z в левую часть уравнения плоскости π:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

найдем значение параметра t_1, соответствующее точке $P(x_1;y_1;z_1)$:

$$A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0 \Rightarrow$$

$$t_1=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}. \qquad (11.17)$$

Подставив найденное значение t_1 в параметрические уравнения прямой L, получим координаты точки пересечения:

$$x_1 = x_0 + t_1 m, \quad y_1 = y_0 + t_1 n, \quad z_1 = z_0 + t_1 p. \qquad (11.18)$$

Если $Am + Bn + Cp = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая L параллельна плоскости π, а точка $(x_0; y_0; z_0)$, через которую проходит прямая, лежит вне этой плоскости. Следовательно, прямая L в этом случае не имеет с плоскостью π общих точек.

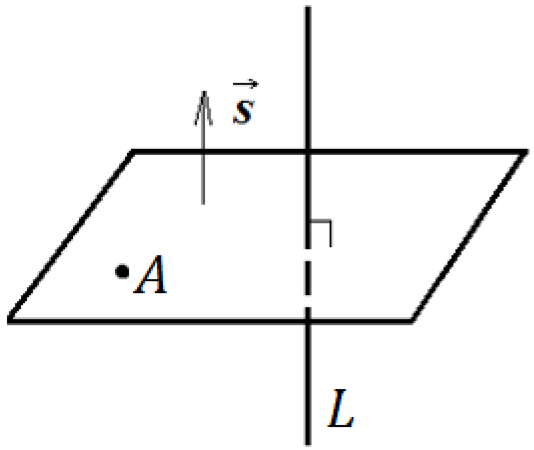
Если $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то в силу первого равенства прямая L параллельна плоскости π, а в силу второго равенства точка $(x_0; y_0; z_0)$ прямой лежит в плоскости.

Следовательно, одновременное выполнение равенств является условием принадлежности прямой L плоскости π:

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases} \qquad (11.19)$$

Пример 11.5. Дана точка $A(2; -4; 1)$ и прямая L: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+3}{5}$. Написать уравнение плоскости π, проходящей через точку A перпендикулярно к прямой L.

Решение. Направляющий вектор $\vec{s} = (3; -1; 5)$ прямой L является одновременно вектором нормали к плоскости π.



Тогда уравнение плоскости имеет вид:

$$3(x-2) - 1(y+4) + 5(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$3x - y + 5z - 15 = 0$ – уравнение плоскости π.

✓ ***Задача 11.1.*** Найти точку пересечения прямой L: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{2}$ с плоскостью π: $2x + 3y - 2z + 2 = 0$.

11.4. Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть даны две скрещивающиеся прямые:

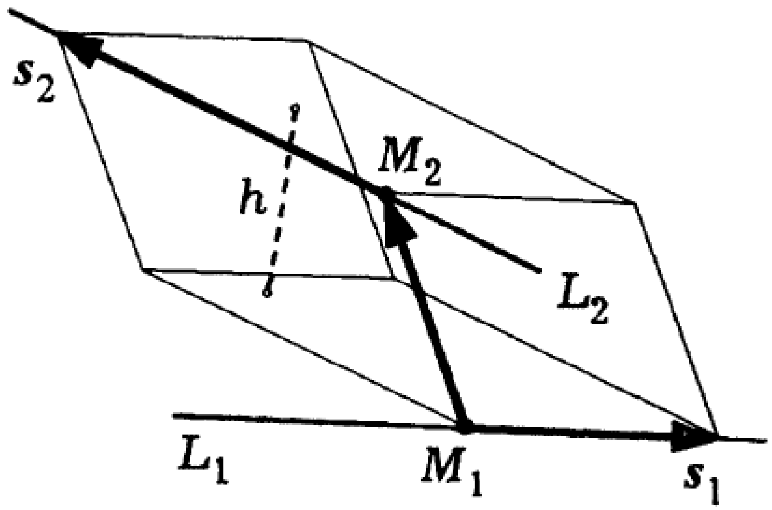
$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad L_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кратчайшее расстояние h между ними равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, т.е. расстоянию между плоскостями (основаниями параллелепипеда), параллельными этим прямым и содержащими их.

Высоту найдем из формулы для объема параллелепипеда:

$$V = h \cdot S_{осн},$$

где $V = \left|\left(\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2\right)\right|$, $S_{осн} = |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|$.



Таким образом, кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми равно:

$$h = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2\right)\right|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}. \qquad (11.20)$$

Условие неколлинеарности векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ гарантирует неравенство нулю знаменателя. Если $h = 0$, то прямые пересекаются.

Условие пересечения двух прямых имеет вид:

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \\ \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \neq 0 \end{cases} \qquad (11/21)$$

11.5. Пучок плоскостей

Определение. Совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую L, называется пучком плоскостей, а прямая L – осью пучка.

Пусть ось пучка задана общими уравнениями прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую, имеет вид:

$$\boxed{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (11.22)}$$

где параметр λ принимает любые действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Уравнение пучка плоскостей используют при решении задач, в которых требуется найти плоскость, проходящую через заданную прямую, причем значение множителя λ обычно находят из какого-либо дополнительного условия, которое определяет положение искомой плоскости.

Пример 11.6. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z + 1 = 0, \\ 3x - y + z + 28 = 0. \end{cases}$$

и точку $M_1(1; -2; 3)$.

Решение. Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую:

$$2x + 3y - 5z + 1 + \lambda(3x - y + z + 28) = 0.$$

Подставим в уравнение пучка координаты точки M_1:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 + 1) + \lambda(3 \cdot 1 - (-2) + 3 + 28) = 0.$$

Следовательно, $\lambda = \frac{1}{2}$. Подставляя найденное значение λ в уравнение пучка, найдем уравнение искомой плоскости:

$$2x + 3y - 5z + 1 + \frac{1}{2} \cdot (3x - y + z + 28) = 0 \Rightarrow$$

$$7x + 5y - 9z + 30 = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. При каких значениях p и B прямая $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{p}$ перпендикулярна плоскости $6x+By-3z+1=0$?

2. При каком значении α плоскость $\alpha x-2y+4z+5=0$ параллельна прямой $\begin{cases} y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$?

3. Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости $10x+2y-11z+450=0$.

4. Можно ли через прямую $\frac{x+2}{3}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+1}{-3}$ провести плоскость параллельно плоскости $12x-y+10z-3=0$?

5. Лежит ли прямая $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-7}$ в плоскости $3x+2y+z=0$? А в плоскости $3x+2y+z-1=0$?

6. * Найти уравнение проекции прямой $\frac{x}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-3}$ на плоскость, заданную уравнением $2x-3y+z-4=0$.

7. * Даны вершины треугольника $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$, $C(-5;14;-3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

8. * Найти уравнения плоскости, проходящей через прямую:

$$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases},$$

и образующей угол $45°$ с плоскостью $x-4y-8z+12=0$.

Спасибо за внимание!