ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – к.ф.-м.н., доцент

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция № 10

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

- Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.
- Общее уравнение плоскости.
- Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, параллельно двум неколлинеарным векторам.
- Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.
- Уравнение плоскости в отрезках
- Угол между плоскостями. Взаимное расположение двух плоскостей.
- Расстояние от точки до плоскости

Определение 10.1. Уравнением поверхности в пространстве $Oxyz$ называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x, y и z каждой точки данной поверхности и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой поверхности.

Уравнение поверхности записывается в виде:

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{или} \quad z = f(x, y).$$

Если точка $M(x; y; z)$ передвигается по поверхности, то ее координаты, изменяясь, удовлетворяют уравнению этой поверхности.

Координаты $(x; y; z)$ называются текущими координатами точек поверхности.

10.1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору

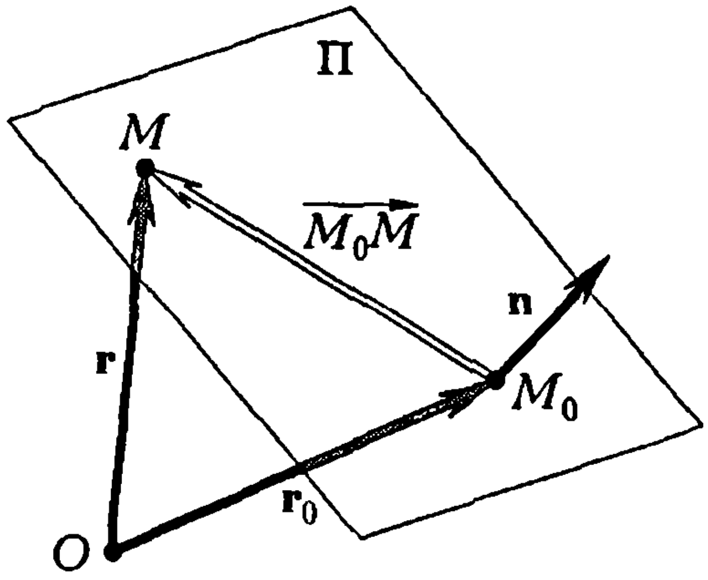
Положение плоскости в пространстве можно задать точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащей плоскости, и вектором $\vec{n} = (A; B; C)$, перпендикулярным этой плоскости.

Любой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости, называется нормальным вектором этой плоскости.

Рассмотрим произвольную точку $M(x; y; z)$, принадлежащую плоскости. Вектор $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0.$$

Обозначим $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ и $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ радиус-векторы точек M и M_0.



$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}.$$

Приравняв к нулю скалярное произведение $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}$, получим уравнение:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0. \qquad (10.1)$$

Уравнение (10.1) называется векторным уравнением плоскости.

Записав уравнение (10.1) в координатной форме, получим уравнение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (10.2)$$

Уравнение (10.2) называется, уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$.

Замечание 10.1. Координаты любой точки M, принадлежащей плоскости, удовлетворяют уравнению (10.2). Координаты точки, не принадлежащей плоскости, не удовлетворяют, т.к. в этом случае вектор $\overrightarrow{M_0M}$ не перпендикулярен вектору $\vec{n}$.

Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется связкой плоскостей, а уравнение (10.2) – уравнением связки плоскостей.

10.2. Общее уравнение плоскости

Если в уравнении (10.1) раскрыть скобки, то получится векторное уравнение плоскости:

$$\vec{r}\cdot\vec{n}+D=0, \qquad (10.3)$$

где $D=-\vec{r}_0\cdot\vec{n}$.

Записав это уравнение в координатах, получим уравнение:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (10.4)$$

Уравнение (10.4) называется общим уравнением плоскости. Уравнение (10.4) – уравнение первого порядка.

Теорема 10.1 (*об общем уравнении плоскости*). В пространстве уравнение любой плоскости в декартовых координатах является уравнением первого порядка вида (10.4):

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A,B,C,D\in\mathbb{R}.$$

И обратно, всякое уравнение первого порядка:

$$Ax + By + Cz + D = 0,\, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

является уравнением некоторой плоскости.

Доказательство.

1) Рассмотрим уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$$

или

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Первая часть теоремы доказана.

2) Покажем, что всякое уравнение первой степени вида:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

является уравнением некоторой плоскости, если хотя бы один из коэффициентов $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ не равен нулю.

Действительно, например, если $A \neq 0$, то уравнение можно записать в виде (10.2):

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0.$$

Таким образом, уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ есть уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-\frac{D}{A}; 0; 0)$, с нормальным вектором $\vec{n} = (A; B; C)$.

Теорема доказана.

Задача 10.1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 0; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2; 2; -2)$.

Задача 10.2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$: $M_0(-5; 3; 10)$, $M_1(0; 5; 7)$, $M_2(2; 7; 8)$.

Особые случаи расположения плоскости:

1. Если коэффициент $D = 0$, то уравнение (10.4) имеет вид:

$$Ax + By + Cz = 0$$

и координаты точки $O(0; 0; 0)$ удовлетворяют уравнению, следовательно, плоскость проходит через начало координат.

2. Если $A = 0$, то уравнение (10.4) имеет вид: $By + Cz + D = 0$ и нормальный вектор плоскости перпендикулярен оси Ox:

$$\vec{n} = (0; B; C) \perp \vec{i} = (1; 0; 0),$$

следовательно, данная плоскость параллельна оси Ox.

Если $C = 0$, то уравнение плоскости примет вид: $Ax + By + D = 0$, где вектор нормали $\vec{n} = (A; B; 0)$, перпендикулярен оси Oz. Следовательно, плоскость параллельна оси Oz.

Если $B = 0$, то плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy.

3. Если $A = 0$ и $D = 0$, то плоскость: $By + Cz = 0$ проходит через ось Ox, т.к. она параллельна оси Ox и проходит через начало координат.

Если $C = 0$ и $D = 0$, то плоскость: $Ax + By = 0$ проходит через ось Oz.

Если $B = 0$ и $D = 0$, то плоскость: $Ax + Cz = 0$ проходит через ось Oy.

4. Если $A = 0$ и $B = 0$, то уравнение плоскости: $Cz + D = 0$ и нормальный вектор плоскости параллелен оси Oz:

$$\vec{n} = (0; 0; C) \parallel \vec{k} = (0; 0; 1),$$

следовательно, данная плоскость параллельна плоскости Oxy и перпендикулярна оси Oz.

Аналогично, уравнениям $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz.

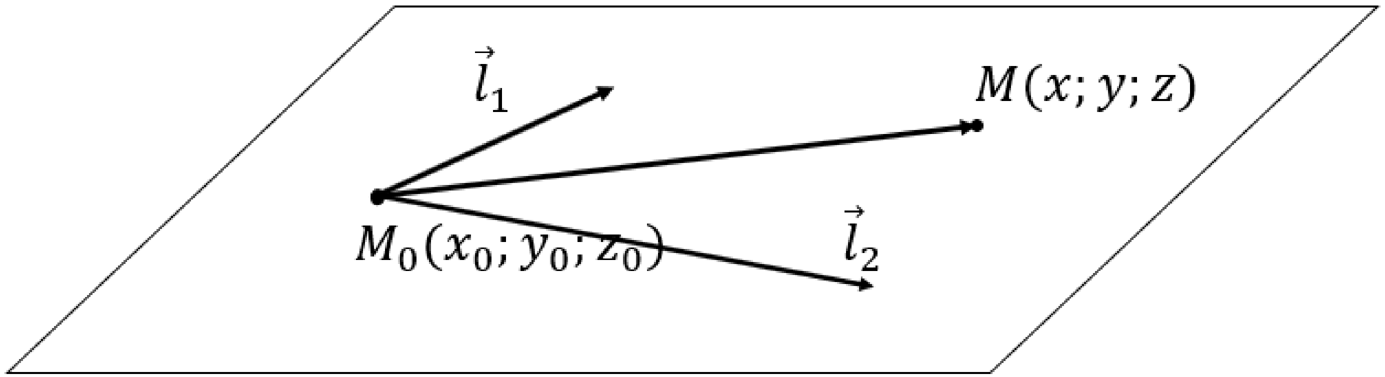
5. Если $A = B = D = 0$, то плоскость $z = 0$ является координатной плоскостью Oxy (параллельна плоскости Oxy и проходит через начало координат).

Аналогично, $y = 0$ – уравнение плоскости Oxz, $x = 0$ – уравнение плоскости Oyz.

10.3. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, параллельно двум неколлинеарным векторам

Плоскость в пространстве можно задать точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащей этой плоскости, и двумя неколлинеарными векторами $\vec{l}_1 = (\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ и $\vec{l}_2 = (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$, параллельными данной плоскости.

Так как точка $M(x; y; z)$ лежит в данной плоскости, то три вектора $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ и $\overrightarrow{M_0M}$ компланарны.



Критерий компланарности векторов – равенство нулю их смешанного произведения:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = 0.$$

Записав это условие в координатной форме, получим уравнение плоскости проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, параллельно двум заданным векторам $\vec{l}_1 = (\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ и $\vec{l}_2 = (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (10.5)$$

Аналогично, можно вывести уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (10.6)$$

Действительно, если $M\ (x, y, z)$ – текущая точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны и их смешанное произведение равно нулю.

Пример 10.1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 3; 1)$, $B(2; -1; 0)$ и $C(5; 6; 7)$.

Решение. Найдем два вектора, параллельных плоскости ABC:

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 2; -1 - 3; 0 - 1) = (0; -4; -1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (5-2; 6-3; 7-1) = (3; 3; 6).$$

В качестве точки плоскости подставим в уравнение (10.5) координаты точки $A(2; 3; 1)$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по первой строке, получим:

$$(x-2)\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-2)\cdot(-21) - (y-3)\cdot 3 + (z-1)\cdot 12 = 0 \Rightarrow$$

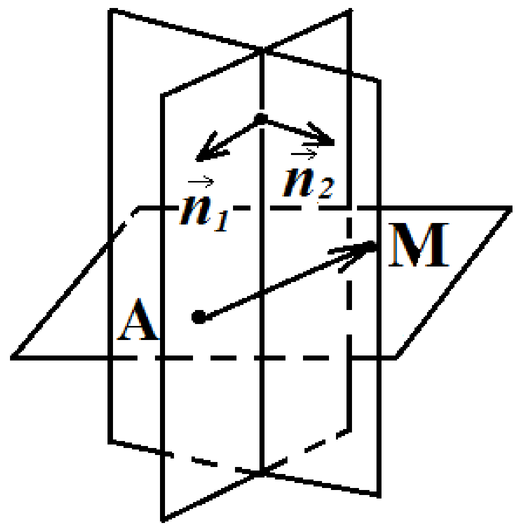
$$-21x - 3y + 12z + 39 = 0 \;\Rightarrow$$

$$-7x - y + 4z + 13 = 0.$$

Пример 10.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 1; -2)$, перпендикулярно плоскостям:

$$x + 3y - 2z + 1 = 0 \;\text{ и }\; -4x + 2y + z - 2 = 0.$$

Решение. Нормальные векторы заданных плоскостей $\overrightarrow{n_1} = (1; 3; -2)$ и $\overrightarrow{n_2} = (-4; 2; 1)$ перпендикулярны каждый своей плоскости. Искомая плоскость проходит через точку А параллельно двум векторам $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$.



В качестве нормального вектора $\vec{n}$ искомой плоскости возьмем векторное произведение нормальных векторов $\overrightarrow{n_1} = (1; 3; -2)$ и $\overrightarrow{n_2} = (-4; 2; 1)$:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 7\vec{j} + 14\vec{k}.$$

Теперь воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку $A(3; 1; -2)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (7; 7; 14)$:

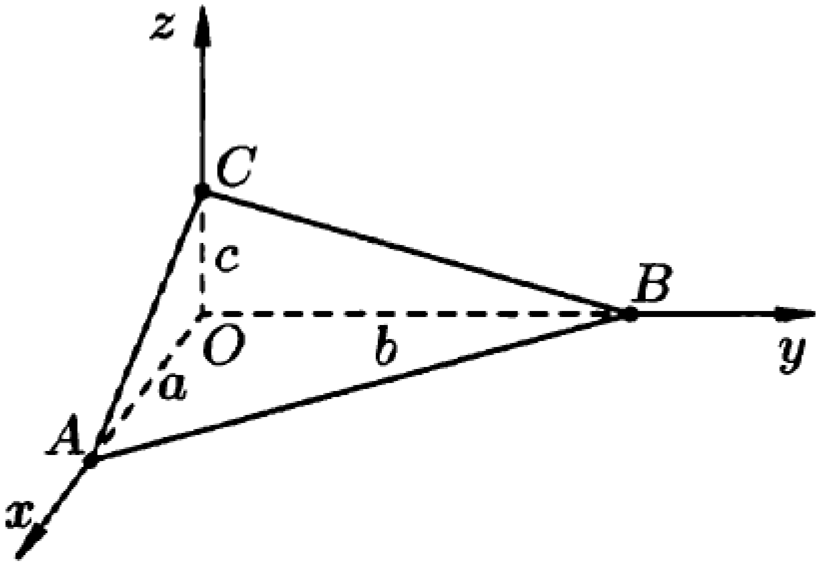
$$7(x-3) + 7(y-1) + 14(z+2) = 0 \Rightarrow$$

$$(x-3) + (y-1) + 2(z+2) = 0$$

$x + y + 2z = 0$ – уравнение искомой плоскости.

10.4. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b и с, т.е. проходит через три точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$.



Подставим координаты точек в уравнение (10.6):

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим:

$$bcx + acy + abz = abc \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (10.7)}$$

(10.7) – уравнение плоскости в отрезках.

Если уравнение плоскости задано в общем виде: $Ax + By + Cz + D = 0$ и коэффициент $D \neq 0$, то его можно записать в виде (10.7).

$$Ax + By + Cz = -D \Rightarrow$$

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{{-D}/{A}}x + \frac{1}{{-D}/{B}}y + \frac{1}{{-D}/{C}}z = 1.$$

Числа $\left|{-D}/{A}\right|$, $\left|{-D}/{B}\right|$, $\left|{-D}/{C}\right|$ есть длины отрезков, отсекаемых плоскостью от координатных осей.

Таким образом, плоскость пересекает ось Ox в точке $\left({-D}/{A}; 0; 0\right)$, ось Oy в точке $\left(0; {-D}/{B}; 0\right)$, ось Oz в точке $\left(0; 0; {-D}/{C}\right)$.

Пример 10.3. Найти объем треугольной пирамиды, отсекаемой плоскостью, проходящей через точки $A(3; -6; 2)$, $B(-3; 6; 2)$ и $C(5; -1; 4)$, от координатного угла.

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через три точки по формуле:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y + 6 & z - 2 \\ -3 - 3 & 6 + 6 & 2 - 2 \\ 5 - 3 & -1 + 6 & 4 - 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 3 & y + 6 & z - 2 \\ -6 & 12 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 3)\begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - (y + 6)\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (z - 2)\begin{vmatrix} -6 & 12 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$24(x - 3) + 12(y + 6) - 54(z - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$4(x - 3) + 2(y + 6) - 9(z - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$4x + 2y - 9z + 18 = 0.$$

Запишем уравнение плоскости в отрезках:

$$4x + 2y - 9z + 18 = 0 \Rightarrow 4x + 2y - 9z = -18 \Rightarrow$$

$$\frac{4x}{-18} + \frac{2y}{-18} - \frac{9z}{-18} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{-4{,}5} + \frac{y}{-9} + \frac{z}{2} = 1 - \text{уравнение плоскости в отрезках.}$$

Следовательно, плоскость пересекает оси Ox, Oy и Oz в точках $M(-4{,}5; 0; 0)$, $N(0; -9; 0)$ и $P(0; 0; 2)$.

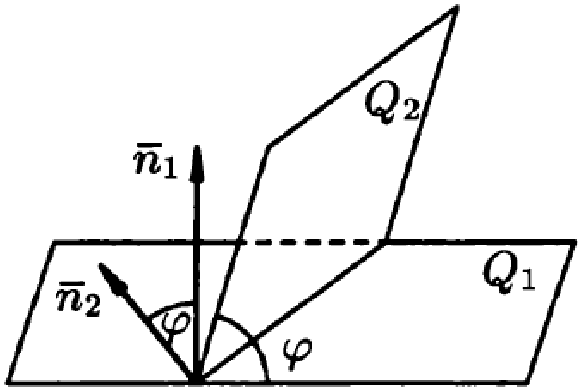
Объем треугольной пирамиды $OMNP$ равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда с ребрами OM, ON и OP:

$$V_{OMNP} = \frac{1}{6} \cdot OM \cdot ON \cdot OP = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{2} \cdot 9 \cdot 2 = \frac{81}{6} = 13{,}5.$$

Ответ: 13,5.

10.5. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости

Двугранный угол между двумя плоскостями равен углу между их векторами нормали.



Пусть даны две плоскости:

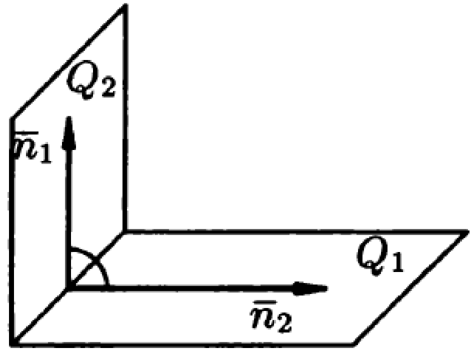
$$Q_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$Q_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

Тогда $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (10.8)$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей

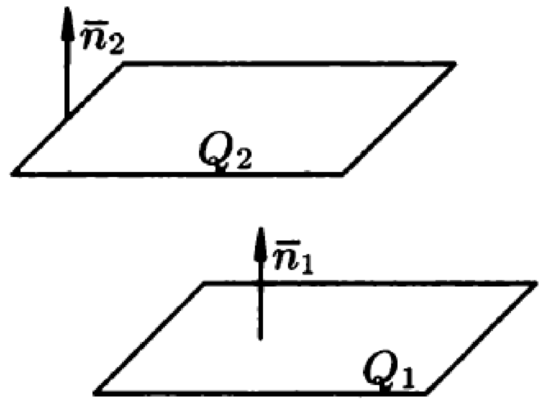


Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их векторы нормали перпендикулярны.

Таким образом, необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух плоскостей является условие:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (10.9)$$

Условие параллельности двух плоскостей



Две плоскости будут параллельны тогда и только тогда, когда их векторы нормали коллинеарны и плоскости не совпадают.

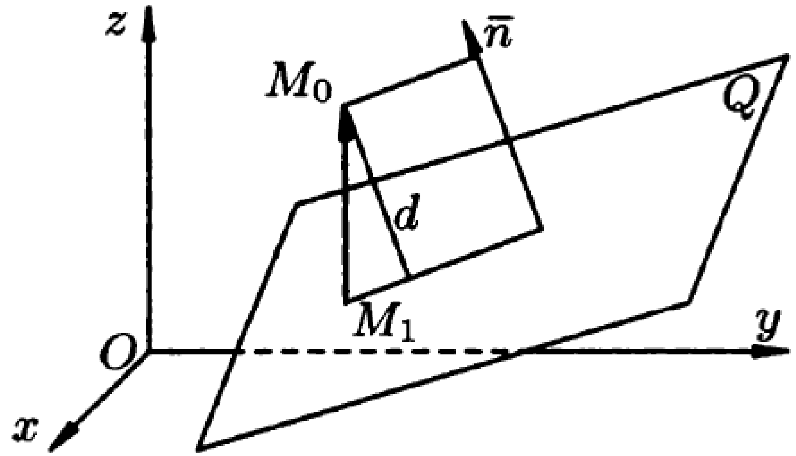
Таким образом, необходимым и достаточным условием параллельности двух плоскостей является условие:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \quad (10.10)$$

Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость Q: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Тогда $\vec{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости Q.



Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка плоскости.

Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормали $\vec{n} = (A; B; C)$:

$$d = \left|\text{Пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0}\right| = \left|\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}}{|\vec{n}|}\right| =$$

$$= \left|\frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

Так как точка $M_1 \in Q$, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ и $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$. Тогда имеем:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (10.11)}$$

В векторной форме формула расстояния от точки до плоскости имеет вид:

$$d = \frac{|\vec{r}_0 \cdot \vec{n} + D|}{|\vec{n}|}. \tag{10.12}$$

Расстояние между двумя параллельными плоскостями

Пусть даны две параллельные плоскости:

$$Q_1: \quad Ax + By + Cz + D_1 = 0,$$

$$Q_2: \quad Ax + By + Cz + D_2 = 0.$$

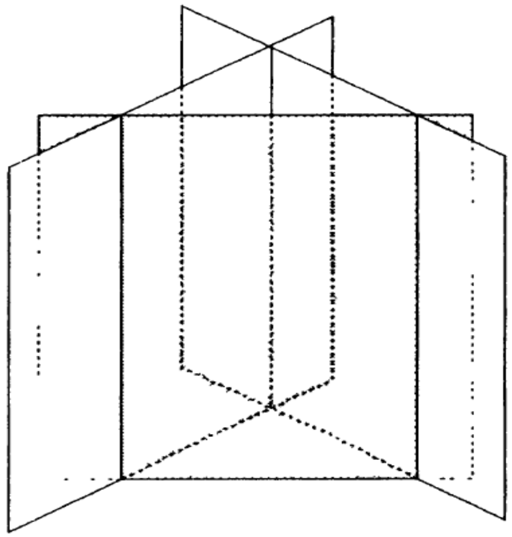
Расстояние между плоскостями может быть найдено по формуле:

$$\boxed{d(Q_1; Q_2) = \left|\frac{D_2 - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.}$$

Взаимное расположение трёх плоскостей

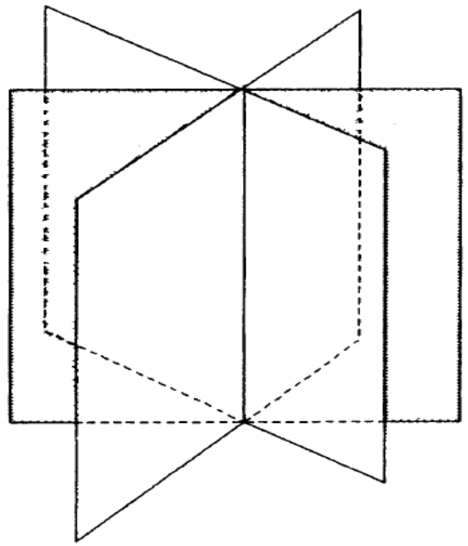
Три плоскости либо пересекаются в одной точке, либо параллельны одной прямой, в частности, проходят через прямую. Исследование взаимного расположение трёх плоскостей равносильно исследованию совместности неоднородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$



В частности, если определитель этой системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, а значит, три плоскости пересекаются в одной точке, координаты которой и есть решение этой системы.

Пример 10.4. Исследовать взаимное расположение двух плоскостей Q_1 и Q_2. Если они пересекаются, найти угол межу ними.



$$Q_1:\ 2x - y - z + 2 = 0,\ Q_2:\ x - 4z - 3 = 0.$$

Решение. Рассмотрим векторы нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$: $\vec{n}_1 = (2;-1;-1)$, $\vec{n}_2 = (1;0;-4) \Rightarrow \vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \Rightarrow$ плоскости пересекаются.

Найдем острый угол между плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{|(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|2+0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-4)^2}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{17}} = \frac{6}{\sqrt{102}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{6}{\sqrt{102}}.$$

10.6. Нормальное уравнение плоскости

Пусть уравнение плоскости задано в общем виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Тогда вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости и его длина:

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,.$$

Разделим обе части общего уравнения на $|\vec{n}|$:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0.$$

Коэффициенты при переменных x, y, z являются координатами единичного вектора, сонаправленного с вектором нормали $\vec{n}$, т.е. это орт вектора нормали, а его координатами являются направляющие косинусы:

$$\vec{e}_{\vec{n}} = \left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right\} = \{\cos\alpha\,; \cos\beta\,; \cos\gamma\}.$$

$$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1.$$

Свободный коэффициент $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ с точностью до знака есть расстояние от начала координат $\mathrm{O}(0; 0; 0)$ до данной плоскости:

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \rho.$$

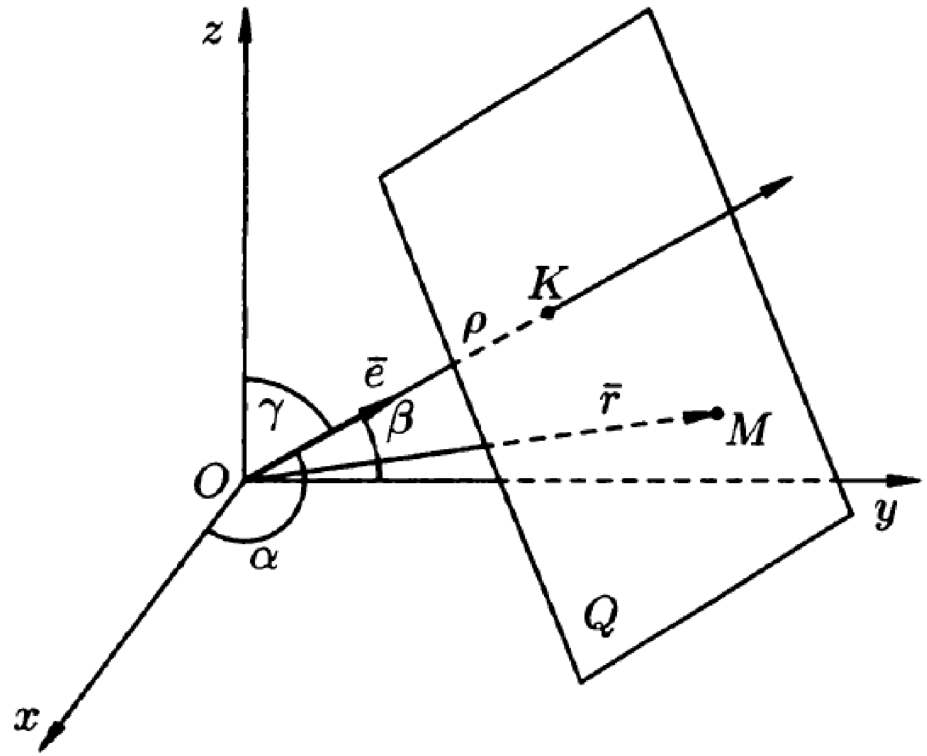
Для того, чтобы получить нормальное уравнение плоскости, достаточно умножить общее уравнение на нормирующий множитель:

$$\mu = \frac{\pm 1}{|\vec{n}|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Знак множителя μ надо брать противоположным знаку свободного члена D.

$$x \cdot cos\,\alpha + y \cdot cos\,\beta + z \cdot cos\,\gamma - \rho = 0 \qquad (10.13)$$

Уравнение (10.13) – нормальное уравнение плоскости.



Пример 10.5. Привести общее уравнение плоскости $x + 2y - 2z - 21 = 0$ к нормальному виду. Найти расстояние от начала координат до этой плоскости.

Решение. Найдем нормирующий множитель $\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $D = -21 \Rightarrow$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \mu = \frac{1}{3}.$$

$$(x + 2y - 2z - 21) \cdot \mu = 0 \cdot \mu \Rightarrow$$

$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 7 = 0$ – нормальное уравнение плоскости, $\rho = 7$ – расстояние от начала координат до плоскости.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Написать уравнение плоскости, расположенной на равном расстоянии от двух данных параллельных плоскостей:

$$4x - 3y + z - 2 = 0 \text{ и } 4x - 3y + z + 8 = 0.$$

2. *Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(0; 0; 2)$ и $M_2(0; 1; 0)$ и образующей угол 45° с плоскостью Oyz.

3. *Плоскости $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ и $3x + y + 2z - 18 = 0$ образуют треугольную пирамиду. Найти объем куба, вписанного в пирамиду так, что три его грани лежат на координатных плоскостях, одна из его вершин на последней плоскости $3x + y + 2z - 18 = 0$.

4. *Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями:

$$2x - 2y + z + 5 = 0 \text{ и } x + 2y - 2z - 3 = 0.$$

Примерный вариант контрольной работы №2

Тема 3. Скалярное, векторное и смешанное произведение.

1. Даны точки $A(1;\ 1;\ 1), B(2;\ 0; 2), C(2; 2; 2), D(3; 4; -3)$. Найти:

1) величину внешнего угла при вершине C в треугольнике ABC;
2) длину медианы BM треугольника ABC;
3) площадь треугольника ABC;
4) высоту DH тетраэдра $DABC$.

2. Даны векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, такие что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}, |\vec{q}| = 3, \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/4$. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ на вектор $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$.

Тема 4. Прямая и плоскость.

3. Даны вершины треугольника: $\mathrm{A}(-2;\ -1), \mathrm{B}(-1; 2), \mathrm{C}(1; 0)$. Составить:

1) каноническое уравнение средней линии параллельной стороне BC;
2) общее уравнение высоты, проведенной из вершины А.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $\mathrm{A}(2; -15; 1)$ и $B(3;\ 1; 2)$ перпендикулярно плоскости $3x - y - 5z + 4 = 0$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\mathrm{A}(-2;1;0)$ параллельно прямой $\frac{x}{-3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{0}$.

6. Найти угол между прямыми: $\begin{cases} x+y-z+4=0 \\ 2x-3y-z-5=0 \end{cases}$ и $\frac{x+3}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2}$.

Пересекаются или скрещиваются данные прямые? Если пересекаются, найти точку пересечения.

Критерии оценивания контрольной работы №2

Каждый пункт задачи оценивается в 1 балл:

9-10 баллов – КР№2 зачтена,

7-8 баллов – собеседование,

менее 7 баллов – КР №2 не зачтена.

Спасибо за внимание!